

Modelos cosmológicos en los formalismos de Eckart e Israel-Stewart

Ruth Noemí Villalobos Rojas

Modelos cosmológicos en los formalismos de Eckart e Israel-Stewart

Ruth Noemí Villalobos Rojas



**UNIVERSIDAD
DE LA SERENA**
CHILE

Tesis Doctoral

Presentada para optar al grado de Doctora en Astronomía
en la Universidad de La Serena por

Ruth Noemí Villalobos Rojas

bajo la supervisión de

Dr. Yerko Vázquez Pizarro, Universidad de La Serena, Chile

Dr. Norman Cruz Marín, Universidad de Santiago de Chile, Chile

Defendida el 28 abril de 2026 ante la comisión compuesta por

Dra. Amelia Ramírez Rivera, Universidad de La Serena, Chile

Dr. Juan Magaña Zapata, Universidad Central, Chile

Dr. José Villanueva Lobos, Universidad de Valparaíso, Chile

Dr. Carlos López Caraballo, Instituto de Astrofísica de Canarias, España

*Dedicada a mis hijos, padres, y tíos:
Né y Jorge en especial*

Índice general

1. Introducción	12
Resultados publicados	17
2. Fundamentos teóricos básicos de la cosmología	18
2.1. Elementos de la Relatividad General	18
2.1.1. La métrica	18
2.1.2. Tensor energía-momento	20
2.1.3. Curvatura del espacio-tiempo	20
2.1.4. Ecuaciones de Campo de Einstein	21
2.2. Cosmología de FLRW	22
2.2.1. Principio cosmológico	22
2.2.2. Ecuaciones de Friedmann	23
2.2.3. Ecuación de conservación	25
2.2.4. Ecuación de estado	25
2.2.5. Evolución de la densidad de energía y factor de escala	27
2.2.6. Principales componentes del universo	28
2.2.6.1. Radiación	28
2.2.6.2. Materia	28
2.2.6.3. Energía Oscura	29
2.2.7. Parámetros cosmológicos	30
2.2.8. Regímenes dinámicos de la expansión	32
2.3. Distancias cosmológicas	34
2.3.1. Corrimiento al rojo cosmológico	34
2.3.2. Ley de Hubble	35
2.3.3. Distancia comóvil y propia	36
2.3.4. Distancia de diámetro angular y distancia de luminosidad	38

3. Cosmología disipativa	39
3.1. Descripción general	39
3.1.1. Teoría termodinámica de primer orden	41
3.1.2. Teoría termodinámica de segundo orden	43
3.2. Ecuaciones de fondo para un universo con viscosidad	45
4. Modelos cosmológicos con viscosidad de volumen	46
4.1. Teoría de Eckart	46
4.1.1. Modelos con materia oscura fría viscosa	46
4.1.1.1. Inclusión de la constante cosmológica	49
4.1.1.2. Inclusión de energía oscura constante	50
4.1.1.3. Inclusión de energía oscura dinámica	50
4.1.2. Resumen de los modelos cosmológicos viscosos considerados	51
4.2. Teoría de Israel-Stewart	52
4.2.1. Modelos con materia oscura fría viscosa y constante cosmológica	53
4.2.1.1. Modelos Λ vCDM con IST	55
4.2.1.2. Modelos Λ vCDM con ISC	56
4.2.2. Resumen de los modelos cosmológicos viscosos considerados	57
5. Estadística bayesiana para análisis de datos en cosmología	60
5.1. Probabilidad	60
5.2. Teorema de Bayes	61
5.3. Inferencia bayesiana	61
5.3.1. Verosimilitud	62
5.3.2. Chi-cuadrado y mejor ajuste	63
5.4. Regiones de credibilidad y diagramas de contorno	63
5.5. Modelos de selección estadísticos	64
5.5.1. Evidencia bayesiana y factor de Bayes	64
5.5.2. Criterios de información para comparación de modelos	66
5.5.2.1. AIC	67
5.5.2.2. BIC	67
5.5.2.3. DIC	67
5.5.2.4. Comparación relativa de los criterios de información	68
5.6. Métodos de Monte Carlo con cadenas de Markov	69
5.6.1. Método MCMC invariante afín	69
5.6.2. Análisis y visualización de las cadenas	70

6. Observables Cosmológicos	72
6.1. Supernovas Tipo Ia	72
6.1.1. Datos utilizados: Pantheon+ y Pantheon+ & SH0ES	73
6.2. Cronómetros cosmológicos	75
6.2.1. Datos utilizados	75
6.3. Distribución previa sobre H_0	75
6.4. Oscilaciones acústicas bariónicas	76
6.4.1. Datos utilizados	77
6.5. Análisis conjunto	80
7. Resultados y análisis de modelos ΛvCDM en la teoría de Eckart	81
7.1. Caso con $m = 0$	82
7.2. Caso con m libre	87
7.3. Caso con $\tilde{\zeta}_0 = 0$	92
7.4. Modelos de selección	92
7.4.1. Criterios de Información	95
7.4.2. Factor de Bayes	96
7.5. Evolución de parámetros cosmológicos	97
7.6. Conclusiones	98
Tablas del Capítulo	101
8. Resultados y análisis de modelos $w(z)$VCDM en la teoría de Eckart	107
8.1. Modelos w VCDM	109
8.1.1. Caso con $m = 0$	109
8.1.2. Caso con m libre	113
8.2. Modelos $w_0 w_a$ VCDM	117
8.2.1. Caso con $m = 0$	117
8.2.2. Caso con m libre	122
8.3. Modelos de selección	126
8.3.1. Criterio de Información	126
8.3.2. Factor de Bayes	128
8.4. Evolución de parámetros cosmológicos	131
8.5. Conclusiones	131
Tablas del Capítulo	133
9. Resultados y análisis de modelos ΛvCDM en la teoría de Israel-Stewart	143
9.1. Formalismo de Israel-Stewart truncado	145

9.1.1. Caso con $m = 0$	145
9.1.2. Caso con m libre	148
9.1.3. Caso con $m = 1/2$	152
9.2. Formalismo de Israel-Stewart completo	155
9.2.1. Caso con m libre	155
9.2.2. Caso con $m = 1/2$	162
9.3. Modelos de selección	165
9.3.1. Criterio de Información	165
9.3.2. Factor de Bayes	167
9.4. Evolución de parámetros cosmológicos	168
9.5. Conclusiones	172
Tablas del Capítulo	176
10.Conclusiones generales	185
11.Trabajo futuro	188
Agradecimientos	190
Bibliografía	192

Resumen

En esta tesis se estudia la dinámica de la expansión tardía del universo, considerando la posible presencia de procesos disipativos asociados a la materia oscura fría. En particular, se analizan modelos cosmológicos con viscosidad de volumen dentro de dos escenarios termodinámicos distintos: el formalismo no causal de Eckart y la teoría causal de Israel-Stewart, en sus versiones truncada y completa. En estos escenarios, la viscosidad de volumen se introduce como una corrección efectiva al fluido cosmológico, lo que modifica la ecuación de continuidad y, en consecuencia, la evolución de la densidad de energía de la materia oscura.

Se consideran distintas extensiones del modelo estándar Λ CDM que incorporan viscosidad en la materia oscura fría (VCDM, por su sigla en inglés: *viscous cold dark matter*), así como generalizaciones de la energía oscura que reemplazan la constante cosmológica por un fluido con parámetro de ecuación de estado constante (w) o dinámico ($w_0 w_a$). En particular, se analizan los modelos Λ_v CDM, w VCDM y $w_0 w_a$ VCDM. El coeficiente de viscosidad de volumen se parametriza mediante una ley de potencia de la forma $\zeta = \zeta_0 (\Omega_{\text{vc}}/\Omega_{\text{vc},0})^m$, donde m determina la evolución de la viscosidad y Ω_{vc} es el parámetro de densidad de la VCDM. Se exploran tres casos: (i) viscosidad constante $\zeta = \zeta_0$ ($m = 0$), (ii) viscosidad variable con m libre, y (iii) el caso especial $m = 1/2$ en el formalismo de Israel-Stewart, considerando tanto versiones con geometría plana como con curvatura espacial.

Las restricciones observacionales se obtienen mediante inferencia bayesiana utilizando muestreo de tipo MCMC. Para ello, se emplean diferentes conjuntos de datos cosmológicos de bajo corrimiento al rojo, incluyendo la muestra de supernovas tipo Ia Pantheon+ (tanto con la calibración SH0ES, como sin ella), mediciones del parámetro de Hubble $H(z)$ provenientes de cronómetros cósmicos, así como compilaciones independientes de oscilaciones acústicas bariónicas, incluyendo las mediciones recientes de DESI DR2. Además, se considera la distribución previa gaussiana para la constante de Hubble basada en la determinación local de SH0ES, $H_0 = 73.04 \pm 1.04 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (*prior* R22). La comparación entre los distintos modelos se realiza mediante criterios de información, tales como AIC, BIC y DIC, junto con el cálculo de la evidencia bayesiana.

Los resultados indican que la tensión en la constante de Hubble persiste, aunque se observa un

alivio parcial ($\sim 1\sigma$) en todos los escenarios analizados cuando se incorporan mediciones locales. En general, las estimaciones obtenidas con los modelos viscosos se sitúan en valores intermedios, $H_0 \sim 69\text{--}71 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, lo que contribuye a reducir parcialmente la discrepancia entre las determinaciones locales y las inferencias cosmológicas de este parámetro.

En los escenarios con curvatura espacial, las restricciones sobre $\Omega_{K,0}$ dependen fuertemente del conjunto de datos. Los análisis que no incluyen mediciones de DESI muestran desviaciones respecto a la planitud a niveles de $2 - 3\sigma$, mientras que la inclusión de BAO de DESI desplaza sistemáticamente las restricciones hacia $\Omega_{K,0} \rightarrow 0$. En los modelos basados en el formalismo de Israel-Stewart, los resultados son compatibles con un universo plano dentro de 1σ para todas las combinaciones de datos analizadas.

Las restricciones sobre la viscosidad de volumen indican valores característicos del orden de $\zeta_0 \sim 10^6 \text{ Pa s}$ en el formalismo de Eckart y $\zeta_0 \sim 10^8 \text{ Pa s}$ en las teorías causales de Israel-Stewart, reflejando la distinta naturaleza termodinámica de ambos escenarios. Sin embargo, los parámetros que controlan la evolución de la viscosidad, en particular el índice m , permanecen débilmente constreñidos por los datos cosmológicos tardíos.

En la comparación estadística, aunque algunos modelos viscosos pueden mejorar marginalmente el ajuste para ciertos conjuntos de datos, el modelo estándar ΛCDM continúa siendo la descripción estadísticamente favorecida del universo a nivel del fondo cosmológico. En consecuencia, los resultados obtenidos indican que los modelos cosmológicos con viscosidad de volumen constituyen extensiones físicamente motivadas del modelo estándar que permiten explorar posibles desviaciones respecto al comportamiento ideal de los fluidos cosmológicos. No obstante, dentro de la precisión actual de los datos observacionales utilizados, no se encuentra evidencia concluyente de efectos disipativos significativos en la dinámica de la expansión tardía del universo.

Abstract

This thesis investigates the dynamics of the late-time expansion of the universe by considering the possible presence of dissipative processes associated with cold dark matter. In particular, cosmological models with bulk viscosity are analyzed within two different thermodynamic scenarios: the non-causal Eckart formalism and the causal Israel–Stewart theory, in both its truncated and full versions. In these scenarios, bulk viscosity is introduced as an effective correction to the cosmological fluid, modifying the continuity equation and consequently the evolution of the dark matter energy density.

Different extensions of the standard Λ CDM model are considered, including viscous cold dark matter (VCDM) scenarios and generalized dark energy models in which the cosmological constant is replaced by a fluid with either a constant (w) or dynamical ($w_0 w_a$) equation of state. In particular, the Λ vCDM, w VCDM, and $w_0 w_a$ VCDM models are analyzed. The bulk viscosity coefficient is parameterized through a power-law relation of the form $\zeta = \zeta_0 (\Omega_{\text{vc}}/\Omega_{\text{vc},0})^m$, where m determines the evolution of the viscosity and Ω_{vc} denotes the density parameter of viscous cold dark matter (VCDM). Three particular cases are explored: (i) constant viscosity $\zeta = \zeta_0$ ($m = 0$), (ii) variable viscosity with m treated as a free parameter, and (iii) the special case $m = 1/2$ in the Israel–Stewart formalism, considering both spatially flat and curved versions.

Observational constraints are obtained through Bayesian inference using MCMC sampling. For this purpose, several low-redshift cosmological datasets are employed, including the Pantheon+ Type Ia supernova sample (both with SH0ES calibration, PPS, and without it, PP), measurements of the Hubble parameter $H(z)$ from cosmic chronometers, and independent compilations of baryon acoustic oscillations, including the recent DESI DR2 measurements. In addition, a Gaussian prior on the Hubble constant based on the local SH0ES determination, $H_0 = 73.04 \pm 1.04 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (R22 prior), is considered. The comparison between models is performed using information criteria such as AIC, BIC, and DIC, together with the computation of the Bayesian evidence.

The results indicate that the Hubble constant tension persists, although a partial alleviation ($\sim 1\sigma$) is observed in all analyzed scenarios when local measurements are included. In general,

the estimates obtained from viscous models lie in intermediate values, $H_0 \sim 69\text{--}71 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, which contributes to partially reducing the discrepancy between local determinations and cosmological inferences of this parameter.

In scenarios with spatial curvature, the constraints on $\Omega_{K,0}$ strongly depend on the dataset combination. Analyses that do not include DESI show deviations from spatial flatness at the $2\text{--}3\sigma$ level, whereas the inclusion of DESI systematically shifts the constraints toward $\Omega_{K,0} = 0$. In models based on the Israel–Stewart formalism, the results are consistent with a spatially flat universe within 1σ for all analyzed dataset combinations.

Constraints on the bulk viscosity indicate characteristic values of order $\zeta_0 \sim 10^6 \text{ Pa s}$ within the Eckart formalism and $\zeta_0 \sim 10^8 \text{ Pa s}$ within the causal Israel–Stewart theories, reflecting the different thermodynamic nature of both scenarios. However, the parameters controlling the evolution of viscosity, particularly the index m , remain weakly constrained by late-time cosmological data.

In the statistical comparison, although some viscous models may marginally improve the fit for certain dataset combinations, the standard Λ CDM model remains the statistically preferred description of the universe at the background level. Consequently, the results indicate that cosmological models with bulk viscosity constitute physically motivated extensions of the standard model that allow the exploration of possible deviations from the ideal-fluid behavior of cosmological components. Nevertheless, within the current precision of the observational data considered here, no conclusive evidence is found for significant dissipative effects in the dynamics of the late-time expansion of the universe.

Capítulo 1

Introducción

Desde el descubrimiento de la expansión acelerada del universo a finales del siglo XX, se ha buscado comprender los mecanismos que gobiernan esta dinámica, así como la naturaleza de la componente de energía exótica que se asocia a la causa de dicha expansión. Este hallazgo, considerado uno de los más trascendentales en la cosmología contemporánea, ha sido respaldado por observaciones clave, como las de supernovas tipo Ia (SNe Ia, por su sigla en inglés: *Type Ia Supernovae*) (Riess et al., 1998; Perlmutter et al., 1999), la Oscilación Acústica de Bariones (BAO, por su sigla en inglés: *Baryon Acoustic Oscillations*) (Weinberg et al., 2013) y las anisotropías del Fondo Cósmico de Microondas (CMB, por su sigla en inglés: *Cosmic Microwave Background*) (Spergel et al., 2003, 2007; Komatsu et al., 2009, 2011; Planck Collaboration et al., 2020).

Las SNe Ia, utilizadas como candelas estándar, revelaron que las supernovas distantes presentan un brillo inferior al esperado en un universo en desaceleración, proporcionando la primera evidencia directa de la expansión acelerada. Este descubrimiento fue reconocido con el Premio Nobel de Física en 2011 (Riess et al., 1998; Perlmutter et al., 1999). Por otro lado, las mediciones de BAO, que trazan la distribución de galaxias a grandes escalas, han corroborado esta aceleración al mostrar un ritmo de expansión coherente con la presencia de un componente energético dominante que posee presión negativa, asociado a la energía oscura. Finalmente, las anisotropías del CMB, que registran las fluctuaciones primordiales del universo temprano, han proporcionado restricciones precisas sobre los parámetros cosmológicos, respaldando un modelo en el que la energía oscura constituye aproximadamente el 70 % de la composición total del universo y es responsable de la expansión acelerada observada (Planck Collaboration et al., 2020).

El modelo cosmológico actualmente más aceptado por ser consistente con los datos observacionales es el modelo estándar, que asume un universo espacialmente plano compuesto de materia oscura fría y una constante cosmológica, conocido como Λ -Materia Oscura Fría (Λ CDM, por su sigla en inglés: *Lambda Cold Dark Matter*). Este modelo propone que Λ actúa como una forma de

energía oscura con presión negativa, impulsando la expansión acelerada del universo (Carroll et al., 1992; Carroll, 2001; Peebles & Ratra, 2003; Frieman et al., 2008), mientras que la CDM se comporta como un fluido perfecto no relativista y sin presión. El modelo está dominado por tales fluidos oscuros no interactuantes, que en conjunto componen aproximadamente el 96 % de nuestro universo. Sin embargo, el modelo Λ CDM no está exento de problemas (Weinberg, 1989). Por ejemplo, no puede explicar la naturaleza física tanto de la CDM como de Λ (Weinberg, 1989; Padmanabhan, 2003). Además, no logra resolver el problema de ajuste fino, es decir, la cuestión de por qué Λ es tan pequeña en comparación con la energía del vacío predicha por la teoría cuántica de campos, cuya estimación difiere en unos 120 órdenes de magnitud de la observada (Zel'dovich, 1968; Weinberg, 1989; Padmanabhan, 2003; Sanchez, 2021), ni aborda el problema de la coincidencia, que cuestiona por qué Λ se vuelve dinámicamente relevante solo en épocas tardías (Zlatev et al., 1999). En conjunto, estos problemas no resueltos se denominan el problema de la constante cosmológica (Weinberg, 1989).

Con la creciente precisión de las observaciones cosmológicas, han surgido discrepancias en los parámetros cosmológicos, evidenciando tensiones dentro del modelo estándar. La más destacada es la denominada “tensión de Hubble”, que surge de la inconsistencia en los valores de la constante de Hubble H_0 inferidos del universo temprano y los obtenidos de mediciones locales. La colaboración Planck (Planck Collaboration et al., 2020), utilizando observaciones del CMB interpretadas dentro del modelo Λ CDM, determinó un valor de $H_0 = (67.36 \pm 0.54) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ con un nivel de confianza del 68 %. En contraste, la colaboración SH0ES (*Supernovae H_0 for the Equation of State*) obtuvo un valor significativamente mayor de $H_0 = (73.04 \pm 1.04) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, también con un nivel de confianza del 68 %, utilizando SNe Ia calibradas con cefeidas (Riess et al., 2022). Estos resultados muestran una tensión cercana a 5σ , que no parece tener su origen en errores sistemáticos, lo que sugiere fuertemente la necesidad de nueva física más allá del modelo estándar. Una revisión más exhaustiva de las propuestas destinadas a abordar la tensión de Hubble se presenta en los siguientes trabajos: (Di Valentino et al., 2021; Moresco et al., 2022; Verde et al., 2024; Perivolaropoulos, 2024); véase también (Mörtsell et al., 2022).

Por estas razones, en las últimas décadas se han explorado diversas extensiones al modelo estándar, junto con alternativas que intentan abordar sus limitaciones. En la mayoría de estas propuestas, los componentes cósmicos se modelan como fluidos perfectos. Entre ellas, los modelos de campos escalares con una ecuación de estado dinámica han recibido considerable atención. Los modelos de quintaesencia ofrecen una alternativa dinámica a Λ (por ejemplo, Caldwell et al. (1998); Di Valentino et al. (2019)), mientras que los modelos fantasmas (Caldwell, 2002) y k-esencia (Chiba, 2002) extienden el modelo estándar a parámetros de ecuación de estado $w < -1$ o a términos cinéticos no canónicos. Diversas revisiones sobre energía oscura y modelos de gravedad modificada

pueden encontrarse en (Copeland et al., 2006; Bamba et al., 2012).

Entre los enfoques alternativos, uno menos convencional consiste en modificar el sector oscuro introduciendo términos disipativos en el tensor energía-momento con el fin de generar expansión acelerada (Avelino & Nucamendi, 2010; Cruz et al., 2017, 2023), intentando además aliviar las tensiones cosmológicas actuales (Anand et al., 2017; Yang et al., 2019; Ashoorioon & Davari, 2023). Estas contribuciones incluyen flujo de calor (Bravo Medina et al., 2019), presión viscosa de tipo volumen y viscosidad de cizalladura. Los modelos cosmológicos más estudiados con fluidos viscosos son aquellos que incorporan viscosidad de volumen, dado que depende únicamente del escalar de expansión y modifica la presión efectiva sin introducir anisotropías, manteniéndose así compatible con el principio cosmológico. Por el contrario, la viscosidad de cizalladura introduce contribuciones direccionales que rompen explícitamente la isotropía.

La primera formulación relativista de un fluido viscoso fue desarrollada por Eckart (Eckart, 1940), como una teoría de primer orden de la termodinámica fuera del equilibrio. Posteriormente, Landau y Lifshitz presentaron un tratamiento alternativo, también de primer orden, dentro de la hidrodinámica relativista (Landau & Lifshits, 1959). Sin embargo, estos formalismos presentan problemas conocidos de causalidad e inestabilidad, ya que conducen a ecuaciones de evolución de tipo parabólico. A pesar de ello, la teoría de Eckart ha sido ampliamente utilizada debido a su simplicidad matemática y constituye una aproximación fundamental para la descripción de fluidos disipativos. Con el objetivo de superar estas limitaciones, Israel y Stewart propusieron una teoría causal de segundo orden (Israel, 1976; Israel & Stewart, 1979), en la cual las variables disipativas satisfacen ecuaciones diferenciales de evolución que incorporan de manera natural un tiempo de relajación, dando lugar a un sistema de tipo hiperbólico que garantiza una propagación causal y una mayor estabilidad.

La incorporación de efectos disipativos en cosmología adquirió mayor relevancia a partir de la década de 1960. Misner fue el primero en introducir formalmente la viscosidad en el contexto cosmológico (Misner, 1968), cuyos efectos fueron posteriormente estudiados por Weinberg (Weinberg, 1971) y Nightingale (Nightingale, 1973). Más adelante, Murphy propuso que la presión viscosa de volumen podría, en principio, inducir una fase de expansión acelerada (Murphy, 1973). Desde entonces, los modelos viscosos han recibido creciente atención debido a su potencial para describir tanto la inflación temprana (Padmanabhan & Chitre, 1987; Maartens & Méndez, 1997) como la aceleración cósmica tardía.

Un fluido con viscosidad de volumen se caracteriza por dos cantidades termodinámicas clave: la densidad de energía ρ y la presión efectiva $P_{\text{eff}} = p + \Pi$, donde p denota la presión de equilibrio y Π representa la presión viscosa de volumen. En el formalismo de Eckart, la presión viscosa toma

la forma $\Pi = -\zeta\vartheta$, donde ζ es el coeficiente de viscosidad de volumen y $\vartheta \equiv \nabla_\mu u^\mu = 3H$ es el escalar de expansión, siendo H el parámetro de Hubble. La teoría de Israel-Stewart amplía esta descripción introduciendo una ecuación de propagación para Π que resuelve las limitaciones de causalidad del enfoque de Eckart.

Tanto la teoría de Eckart como la de Israel-Stewart pueden explicar la expansión acelerada del universo sin una constante cosmológica, siempre que $\Pi < 0$ y, en consecuencia, $\zeta > 0$ para satisfacer la segunda ley de la termodinámica (Weinberg, 1972). Sin embargo, análisis de inflación disipativa (Maartens, 1995) revelan una limitación fundamental: los modelos que dependen exclusivamente de la viscosidad de volumen para impulsar la aceleración violan la condición de cuasi-equilibrio

$$\left| \frac{\Pi}{p} \right| \ll 1,$$

necesaria para mantener el sistema cercano al equilibrio térmico local. Esta dificultad sugiere que mecanismos puramente viscosos no pueden explicar de manera consistente la aceleración cósmica tardía sin la incorporación de componentes adicionales. Ello motiva la inclusión de una constante cosmológica, respaldada por evidencia observacional (Riess et al., 1998; Perlmutter et al., 1999; Bennett et al., 2013). En este contexto, resulta pertinente considerar escenarios mixtos en los cuales la viscosidad de volumen actúa como una corrección disipativa al sector oscuro en presencia de Λ , en lugar de constituir un mecanismo autosuficiente para explicar la expansión acelerada del universo. Estudios recientes (Cruz et al., 2018; Herrera-Zamorano et al., 2020; Cruz et al., 2022b,a) muestran que una Λ positiva puede preservar las condiciones de cuasi-equilibrio en ciertos regímenes.

Dado que la materia cósmica puede presentar procesos disipativos (Anand et al., 2018), se analizan modelos de materia oscura fría viscosa (vCDM) dentro del formalismo de Eckart e Israel-Stewart en presencia de Λ , siguiendo la descripción de la dinámica de fondo desarrollada por (Velten & Schwarz, 2012; Velten et al., 2014). Estos modelos se denotan como Λ vCDM y constituyen una extensión directa del modelo estándar al incorporar presión viscosa en la componente de materia oscura. De esta manera, la dinámica cosmológica deja de estar determinada únicamente por una presión perfecta, permitiendo evaluar el impacto de los efectos disipativos sobre la expansión del universo.

Más allá del escenario con constante cosmológica, resulta natural explorar extensiones en las que el sector oscuro se describe mediante un parámetro de ecuación de estado constante w libre, dando lugar al modelo w CDM, que contiene a Λ CDM como caso particular cuando $w = -1$. La

incorporación de la viscosidad de volumen en la materia oscura conduce al escenario w VCDM, en el que se combinan una ecuación de estado generalizada y efectos disipativos. Asimismo, se consideran parametrizaciones dinámicas. En particular, la forma de Chevallier–Polarski–Linder (CPL) (Chevallier & Polarski, 2001; Linder, 2003) introduce una dependencia explícita con el factor de escala que permite describir posibles variaciones temporales del parámetro de ecuación de estado. En este contexto, los modelos w_0w_a VCDM combinan dinámica en la ecuación de estado y efectos viscosos, proporcionando una extensión más general que permite evaluar su impacto observacional y su posible contribución al alivio de tensiones cosmológicas.

El objetivo general de esta tesis es estudiar modelos cosmológicos descritos por la métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW), incorporando procesos disipativos mediante fluidos viscosos, y evaluar su consistencia con medidas observacionales tardías.

Para ello, se consideran los siguientes objetivos específicos:

- Formular modelos cosmológicos con viscosidad de volumen (Λ vCDM, w VCDM y w_0w_a VCDM) en los formalismos de Eckart e Israel–Stewart, considerando tanto geometría plana como curvatura espacial.
- Inferir los parámetros cosmológicos y viscosos mediante un muestreador MCMC invariante bajo transformaciones afines.
- Analizar los modelos utilizando conjuntos de datos observacionales del universo tardío, incluyendo SNe Ia, mediciones del parámetro de Hubble y BAO.
- Evaluar el impacto de la viscosidad de volumen en la tensión de Hubble y en la curvatura espacial.
- Comparar los modelos viscosos con Λ CDM mediante criterios de información y evidencia bayesiana.
- Examinar si las observaciones favorecen la inclusión de efectos disipativos en la materia oscura fría.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. Tras la Introducción, el Capítulo 2 presenta los fundamentos teóricos de la cosmología, incluyendo los elementos básicos de la Relatividad General, la dinámica del universo FLRW y las principales distancias y parámetros cosmológicos. El Capítulo 3 introduce la cosmología disipativa mediante las teorías de Eckart e Israel–Stewart y las ecuaciones de fondo para un universo con viscosidad de volumen, mientras que el Capítulo 4

formula los modelos cosmológicos viscosos considerados en este trabajo. El Capítulo 5 expone el formalismo de la estadística bayesiana y los métodos de selección de modelos empleados, y el Capítulo 6 describe los observables y los conjuntos de datos utilizados. En cuanto a los resultados observacionales, el Capítulo 7 presenta los resultados obtenidos para el modelo Λ vCDM en el formalismo de Eckart. El Capítulo 8 amplía el análisis a los modelos w VCDM y w_0w_a VCDM en el mismo formalismo. Posteriormente, el Capítulo 9 presenta el estudio del modelo Λ vCDM en el formalismo de Israel–Stewart. En todos los modelos considerados se estudian universos espacialmente planos y con curvatura, junto con un análisis estadístico detallado y una comparación sistemática con el modelo estándar Λ CDM. Finalmente, el Capítulo 10 resume las conclusiones principales, mientras que el Capítulo 11 presenta el trabajo futuro.

Resultados publicados

Los principales resultados presentados en el Capítulo 7 fueron presentados en el artículo *Bulk viscous cosmological models with cosmological constant: Observational constraints*, publicado en *Astronomy & Astrophysics* (Villalobos et al., 2026).

Capítulo 2

Fundamentos teóricos básicos de la cosmología

2.1. Elementos de la Relatividad General

En 1915, Albert Einstein formuló la Teoría de la Relatividad General (RG), proporcionando una descripción geométrica de la gravitación que reemplaza la concepción newtoniana basada en fuerzas (Einstein, 1915b). Mientras que la teoría de Newton es adecuada en el régimen de bajas velocidades y campos gravitatorios débiles, la RG se vuelve imprescindible para describir fenómenos gravitacionales fuertes, la evolución del universo y la propagación de la luz en presencia de masas. Un ejemplo histórico es la precesión anómala del perihelio de Mercurio, un fenómeno que desafía la explicación newtoniana, pero que encuentra respuesta dentro del formalismo einsteiniano (Einstein, 1915a; Dyson et al., 1920).

La RG establece que la materia y la energía determinan la curvatura del espacio-tiempo, y esta curvatura gobierna el movimiento de las partículas y la dinámica del universo. La formulación completa de la teoría fue presentada posteriormente por Einstein (Einstein, 1916), sentando las bases matemáticas y conceptuales del formalismo relativista moderno.

2.1.1. La métrica

En relatividad, la métrica es una herramienta matemática fundamental que permite definir la distancia física entre dos eventos en el espacio-tiempo dentro de un sistema de coordenadas arbitrarias. Esto contrasta con la mecánica newtoniana, cuya descripción geométrica se fundamenta en un espacio euclidiano tridimensional, mientras que el tiempo se introduce como un parámetro externo, absoluto e independiente de las coordenadas espaciales.

En la Relatividad Especial, el espacio-tiempo es plano y está caracterizado por la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ en cuatro dimensiones. De manera general, este tensor determina el intervalo infinitesimal entre dos eventos separados por una distancia infinitesimal dx^μ mediante el elemento de línea, dado por

$$ds^2 \equiv \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.1.1)$$

donde los índices griegos recorren las cuatro coordenadas del espacio-tiempo. En esta métrica, el intervalo ds^2 es invariante bajo transformaciones de Lorentz, lo que garantiza que su valor sea el mismo para todos los observadores inerciales, independientemente de su estado de movimiento relativo.

En la RG, este concepto se extiende al permitir que el espacio-tiempo sea curvo, cuya forma está determinada por la distribución y la dinámica de la materia-energía presentes. En este contexto, la geometría queda completamente determinada por el tensor métrico $g_{\mu\nu}$, un tensor simétrico de segundo orden que contiene toda la información geométrica necesaria para describir la estructura del espacio-tiempo. El elemento de línea adopta la forma general

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.1.2)$$

A diferencia de la métrica de Minkowski, el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ puede depender explícitamente de las coordenadas, p. ej. si usamos coordenadas esféricas, reflejando la curvatura inducida por el campo gravitacional.

En cosmología, al asumir que el universo es homogéneo e isótropo a gran escala, la métrica de FLRW constituye la forma más general compatible con estas simetrías. En coordenadas comóviles, esta se expresa como

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.1.3)$$

donde $a(t)$ es el factor de escala, que describe cómo el tamaño del universo cambia con el tiempo cósmico, definido como el tiempo propio medido por un observador comóvil con el fluido cosmológico, c es la velocidad de la luz, y γ_{ij} es el tensor métrico del espacio tridimensional, cuya forma depende de la curvatura espacial. En este contexto, los índices latinos denotan las coordenadas espaciales.

Existen dos convenciones comunes para la signatura de la métrica. A lo largo de esta tesis, se adopta la signatura $(-, +, +, +)$, de modo que el componente temporal es negativo, mientras que los componentes espaciales son positivos.

2.1.2. Tensor energía-momento

La dinámica del espacio-tiempo está determinada por el tensor de energía-momento, denotado por $T_{\mu\nu}$, el cual es un tensor simétrico de segundo orden que describe la distribución de energía, momento y tensiones. En cuatro dimensiones, el tensor energía-momento puede representarse de forma matricial como

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.1.4)$$

Al distinguir entre índices espacio-temporales $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ e índices espaciales $i, j = 1, 2, 3$, las componentes del tensor energía-momento se interpretan físicamente, en el sistema comóvil, como (Misner et al., 1973; Carroll, 2019):

- $T_{00} = \rho$: densidad de energía.
- $T_{0i} = T_{i0}$: densidad de momento/flujo de energía; nula en el sistema comóvil.
- $T_{ij} = pg_{ij} + \pi_{ij}$: tensor de tensiones o flujo de momento, donde

pg_{ij} : presión isotrópa. En particular, $T_{11} = T_{22} = T_{33} = pg_{ii}$.

π_{ij} : presión anisótropa o cizalladura, p. ej., debida a la viscosidad; es nula en FLRW y para un fluido perfecto.

2.1.3. Curvatura del espacio-tiempo

La curvatura del espacio-tiempo se caracteriza mediante el tensor de Riemann (o tensor de curvatura de Riemann), un tensor de cuarto orden definido a partir de la conexión métrica (Carroll, 2019). Se define como

$$\mathcal{R}^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}, \quad (2.1.5)$$

donde $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ son los símbolos de Christoffel, definidos a partir del tensor métrico como

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (2.1.6)$$

A partir del tensor de Riemann es posible construir otros invariantes geométricos relevantes. En particular, el tensor de Ricci $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ se obtiene mediante la contracción del tensor de Riemann,

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} \equiv \mathcal{R}^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}, \quad (2.1.7)$$

mientras que el escalar de curvatura, o escalar de Ricci, se define a partir de la contracción del tensor de Ricci con el tensor métrico inverso $g^{\mu\nu}$,

$$\mathcal{R} \equiv g^{\mu\nu} \mathcal{R}_{\mu\nu}. \quad (2.1.8)$$

El escalar de curvatura proporciona una medida global de la curvatura del espacio-tiempo, integrando la información sobre la curvatura en todas las direcciones.

2.1.4. Ecuaciones de Campo de Einstein

La RG describe la gravitación como una manifestación geométrica de la curvatura del espacio-tiempo inducida por la presencia de materia y energía, cuya dinámica está descrita por las ecuaciones de campo de Einstein.

La curvatura del espacio-tiempo está caracterizada por el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, el cual se construye a partir del tensor de Ricci, Ec. (2.1.7), el escalar de Ricci, Ec. (2.1.8), y el tensor métrico $g_{\mu\nu}$, de acuerdo con

$$G_{\mu\nu} \equiv \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathcal{R} g_{\mu\nu}. \quad (2.1.9)$$

Una propiedad fundamental de este tensor es que satisface la identidad de Bianchi contraída,

$$\nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = 0, \quad (2.1.10)$$

lo que garantiza la conservación covariante de la energía y el momento. En consecuencia, las ecuaciones de campo deben relacionar $G_{\mu\nu}$ con un tensor que describa el contenido de materia y energía del espacio-tiempo, el cual también se debe conservar de manera covariante. La relación más simple compatible con estas propiedades es

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.1.11)$$

donde κ es una constante de acoplamiento. Al imponer que las ecuaciones de Einstein reproduzcan la ecuación de Poisson de la gravitación newtoniana en el régimen de campo gravitacional débil y velocidades no relativistas (Weinberg, 1972), se obtiene

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}, \quad (2.1.12)$$

siendo G la constante de gravitación universal newtoniana¹. De este modo, las ecuaciones de campo se reescriben como

$$G_{\mu\nu} \equiv \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.1.13)$$

Estas ecuaciones constituyen un sistema de diez ecuaciones diferenciales parciales no lineales y acopladas para las componentes de la métrica, reflejando tanto la simetría del tensor métrico como la complejidad inherente de la interacción gravitacional. Resolver estas ecuaciones para un sistema físico específico puede ser complicado y requiere el uso de técnicas matemáticas avanzadas. Entre las soluciones exactas más relevantes de las ecuaciones de campo se encuentran la métrica de Schwarzschild (Schwarzschild, 1916a,b), que describe el campo gravitacional exterior de un objeto esféricamente simétrico y no cargado, y la métrica de FLRW (Friedmann, 1922; Lemaître, 1927; Robertson, 1935; Walker, 1937). Esta última, al ser sustituida en las ecuaciones de campo de Einstein junto con un modelo adecuado para $T^{\mu\nu}$, da lugar a las ecuaciones de Friedmann (Friedmann, 1922; Ryden, 2003; Carroll, 2019), las cuales gobiernan la dinámica de la expansión cósmica.

Con el fin de garantizar la existencia de soluciones cosmológicas estáticas, Einstein introdujo una modificación a sus ecuaciones, incorporando un término adicional, conocido como la “constante cosmológica”, denotado por Λ . Así, la ecuación original se reescribe como

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.1.14)$$

2.2. Cosmología de FLRW

2.2.1. Principio cosmológico

El principio cosmológico establece que el universo es homogéneo e isótropo a grandes escalas espaciales, superiores a 100 Mpc (Ryden, 2003; Mukhanov, 2005). La homogeneidad se interpreta

¹ $G \approx 6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ (Mohr et al., 2025)

como la invariancia de las propiedades estadísticas del universo bajo traslaciones espaciales, lo que da lugar a la ausencia de posiciones privilegiadas y a la presencia de una densidad media de materia constante a grandes escalas. Por su parte, la isotropía corresponde a invariancia bajo rotaciones espaciales, lo que implica que no existen direcciones preferentes y, en consecuencia, que el universo se observa igual en todas las direcciones desde cualquier punto comóvil.

La extensión temporal de este principio conduce al “principio cosmológico perfecto”, que sostiene que el universo ha mantenido la homogeneidad y la isotropía a lo largo de toda su evolución. No obstante, esta hipótesis solo puede considerarse como una descripción válida a gran escala. Asimismo, las mediciones del CMB y la evolución de la distribución de galaxias muestran de manera concluyente que el universo experimenta una evolución temporal, por lo que esta extensión no resulta compatible con la evidencia observacional.

2.2.2. Ecuaciones de Friedmann

El conocimiento sobre la distribución de la materia en el universo es limitado, lo que inicialmente dificultó la resolución de la teoría de la gravedad de Einstein. Sin embargo, los primeros cosmólogos se valieron del principio cosmológico para abordar este problema. Bajo este principio, y asumiendo un fluido perfecto, el tensor de energía-momento adopta la forma (Weinberg, 1972)

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}, \quad (2.2.1)$$

donde ρ y p denotan la densidad de energía y la presión total del fluido, respectivamente. El cuadvectores velocidad u^μ es un campo vectorial unitario de tipo tiempo que describe la cuadvectores del fluido y satisface la condición de normalización $u^\mu u_\mu = -1$. En el sistema de referencia comóvil, y en ausencia de movimientos peculiares, sus componentes se reducen a

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad u_\mu = (-1, 0, 0, 0). \quad (2.2.2)$$

El principio cosmológico conduce de manera natural a la métrica de FLRW descrita en la Ec. (2.1.3), que en coordenadas esféricas comóviles (r, θ, ϕ) se reformula como

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (2.2.3)$$

donde t es el tiempo cósmico, $a(t)$ es el factor de escala, y K es el parámetro de curvatura espacial que puede tomar los valores $-1, 0, +1$, correspondientes a una geometría espacial hiperbólica, plana o esférica, respectivamente.

El tensor métrico asociado a la métrica de FLRW presenta una forma diagonal, dada por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a(t)^2}{1 - Kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(t)^2 r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}. \quad (2.2.4)$$

Para esta métrica, las componentes no nulas del tensor de Ricci se escriben, en forma matricial, como

$$R_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -3\frac{\ddot{a}}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2Kc^2}{c^2(1 - Kr^2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{c^2}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2K) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2Kc^2)\frac{r^2 \sin^2 \theta}{c^2} \end{pmatrix}, \quad (2.2.5)$$

donde el punto sobre una variable denota la derivada con respecto al tiempo cósmico. Asimismo, al contraer el tensor $\mathcal{R}_{\mu\nu}$, se obtiene el escalar de curvatura

$$\mathcal{R} \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{6}{c^2} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{Kc^2}{a^2} \right]. \quad (2.2.6)$$

En términos del factor de escala, se define el parámetro de Hubble $H(t)$ como la tasa de expansión del universo,

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (2.2.7)$$

En este contexto, al considerar la componente temporal de las ecuaciones de campo de Einstein ($\mu = \nu = 0$) para un fluido perfecto en presencia de una constante cosmológica, se obtiene la primera ecuación de Friedmann,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}. \quad (2.2.8)$$

De manera análoga, a partir de las componentes espaciales de las ecuaciones de Einstein, se deriva la segunda ecuación de Friedmann,

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\frac{8\pi G}{c^2} p + \frac{Kc^2}{a^2} + \Lambda c^2. \quad (2.2.9)$$

Al combinar las Ecs. (2.2.8) y (2.2.9), se obtiene una nueva expresión para la segunda ecuación de Friedmann, conocida como la ecuación de aceleración,

$$\frac{\ddot{a}}{a} \equiv \dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\rho + 3p) + \frac{\Lambda c^2}{3}. \quad (2.2.10)$$

2.2.3. Ecuación de conservación

Las ecuaciones de Friedmann describen cómo la geometría del universo, caracterizada por el factor de escala, evoluciona con el tiempo. Sin embargo, para determinar completamente la dinámica cosmológica es necesario considerar también la evolución de la densidad de energía en respuesta a la expansión o contracción del espacio-tiempo.

Esta relación está descrita por la ecuación de conservación, o ecuación de continuidad, que puede derivarse combinando la primera y la segunda ecuación de Friedmann, o bien directamente del principio de conservación de la energía y el momento, expresado mediante la anulación de la divergencia covariante del tensor energía-momento,

$$\nabla_\nu \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0. \quad (2.2.11)$$

En un universo descrito por la métrica de FLRW, la componente temporal de esta ecuación conduce a la forma escalar

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (2.2.12)$$

la cual describe la conservación local del tensor energía-momento y determina la evolución de la densidad de energía del fluido cósmico en función de la expansión del universo.

2.2.4. Ecuación de estado

El conjunto de ecuaciones dinámicas, dado por las Ecs. (2.2.8), (2.2.9), o, equivalentemente, (2.2.10), y (2.2.12), involucra tres incógnitas: $a(t)$, $\rho(t)$, y $p(t)$, e incluye dos parámetros libres asociados a la curvatura y a la constante cosmológica. Sin embargo, este sistema no se encuentra

cerrado. Para poder resolverlo y obtener la evolución del universo es necesario introducir una ecuación adicional, denominada ecuación de estado, que establece la relación entre la presión del fluido y su densidad de energía de la forma $p = p(\rho)$.

El universo está compuesto por diversos componentes con propiedades muy distintas, los cuales interactúan débilmente entre sí, salvo en breves etapas. Por esta razón, cada componente puede describirse mediante una ecuación de estado que no se acopla directamente a las de los demás componentes. En particular, las ecuaciones de estado de estos componentes pueden ser representadas por la ecuación de estado de un fluido perfecto barotrópico,

$$p = w\rho = (\gamma - 1)\rho, \quad (2.2.13)$$

donde w y γ son índices barotrópicos adimensionales cuyos valores dependen del tipo de componente considerado, tal como se ilustra en la Fig. (2.2.1).

La ecuación de estado está sujeta a restricciones físicas fundamentales, en particular, a las impuestas por la causalidad. De acuerdo con la definición termodinámica, la velocidad del sonido c_s adiabática en el fluido es dada por (Ryden, 2003):

$$c_s^2 = c^2 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S, \quad (2.2.14)$$

donde la derivada se evalúa a entropía constante S . En el caso de un fluido barotrópico con ecuación de estado $p = w\rho$, se obtiene $c_s = c\sqrt{w}$. La condición de causalidad exige que la velocidad del sonido no supere la velocidad de la luz, lo que conduce a las restricciones

$$0 \leq w \leq 1 \quad \text{ó} \quad 1 \leq \gamma \leq 2. \quad (2.2.15)$$

Al cumplirse estas restricciones, se asegura que el modelo sea físicamente consistente. Para la radiación $c_s^2 = c^2/3$, mientras que para la materia bariónica y la materia oscura fría se tiene $c_s^2 = 0$.

De manera más general, al considerar una mezcla de dos fluidos a y b , caracterizados por índices barotrópicos γ_a y γ_b , respectivamente, la velocidad del sonido adiabático está dada por

$$c_s^2 = c^2 \left(\frac{\gamma_a(\gamma_a - 1)\rho_a + \gamma_b(\gamma_b - 1)\rho_b}{\gamma_a\rho_a + \gamma_b\rho_b} \right). \quad (2.2.16)$$

En el caso particular de una mezcla cosmológica de radiación y materia bariónica, se obtiene

$$c_s^2 = c^2 \left[3 \left(1 + \frac{3\rho_b}{4\rho_r} \right) \right]^{-1}. \quad (2.2.17)$$

Una vez especificada la ecuación de estado, el sistema queda completamente determinado y describe la dinámica de fondo del universo. Cuando uno de los componentes corresponde a energía oscura tipo constante cosmológica, su contribución a la velocidad del sonido adiabática es nula; en consecuencia, la propagación de perturbaciones acústicas queda determinada exclusivamente por los componentes de materia y radiación, mientras que la energía oscura influye únicamente a través de la dinámica de fondo.

2.2.5. Evolución de la densidad de energía y factor de escala

A lo largo de las distintas etapas de evolución del universo observable, resulta necesario caracterizar su contenido a partir de los distintos fluidos que lo componen. La densidad de energía total corresponde a la suma de las contribuciones individuales de cada componente,

$$\rho = \sum_i \rho_i. \quad (2.2.18)$$

A partir de la ecuación de conservación (Ec. (2.2.12)), combinada con la ecuación de estado barotrópica (Ec. (2.2.13)), se obtiene la expresión general para la evolución de la densidad de energía de cada componente,

$$\rho_i = \rho_{i,0} \exp \left(-3 \int_1^a \frac{1 + \omega(a')}{a'} da' \right), \quad (2.2.19)$$

donde $\rho_{i,0}$ denota la densidad de energía actual del fluido i . En el caso de un fluido no interactuante cuyo parámetro de ecuación de estado w es constante, la Ec. (2.2.19) admite una solución analítica dando lugar a la siguiente dependencia con el factor de escala

$$\rho_i = \rho_{i,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3+3w}, \quad (2.2.20)$$

siendo a_0 el valor actual del factor de escala. Sustituyendo la Ec. (2.2.20) en la primera ecuación de Friedmann descrita por la Ec. (2.2.8) y asumiendo un universo espacialmente plano con $w \neq -1$, se deduce que el factor de escala evoluciona como una ley de potencia del tiempo cósmico,

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3+3w}, \quad (2.2.21)$$

donde t_0 corresponde a la edad actual del universo y está determinada por la densidad de energía presente (Ryden, 2003).

2.2.6. Principales componentes del universo

2.2.6.1. Radiación

La radiación corresponde a partículas relativistas, como fotones y neutrinos sin masa. Este componente se caracteriza por un parámetro de ecuación de estado $\omega = 1/3$, lo que implica la existencia de una presión de radiación dada por

$$p_r = \frac{\rho_r}{3}. \quad (2.2.22)$$

A partir de la Ec. (2.2.20), se deduce que la densidad de energía de la radiación evoluciona con el factor de escala según

$$\rho_r(a) = \rho_{r,0} a^{-4}. \quad (2.2.23)$$

Cuando se consideran tanto la contribución de fotones como la de los neutrinos sin masa, la densidad de energía total de la radiación se expresa como

$$\rho_r = \rho_\gamma + \rho_\nu = \rho_\gamma \left[1 + \frac{7}{8} \left(\frac{4}{11} \right)^{4/3} N_{\text{eff}} \right], \quad (2.2.24)$$

donde N_{eff} representa el número efectivo de especies de neutrinos, cuyo valor en el modelo estándar es $N_{\text{eff}} = 3.046$ (Mangano et al., 2002, 2005).

2.2.6.2. Materia

La materia constituye aproximadamente el 31.5 % del contenido energético actual del universo (Planck Collaboration et al., 2020). Este componente, también denominado polvo, incluye tanto la materia bariónica como la materia oscura fría. Dado que su presión es despreciable en comparación con su densidad de energía, se comporta como un fluido no relativista caracterizado por un parámetro de ecuación de estado $\omega = 0$.

La materia bariónica está compuesta principalmente por protones, neutrones y electrones, y constituye aproximadamente el 4.9 % de la densidad de energía total.

Por otra parte, la existencia de materia oscura se postula para explicar diversas observaciones astrofísicas y cosmológicas, tales como la dinámica de las galaxias en el cúmulo de Coma (Zwicky, 1933), las curvas de rotación galácticas (Rubin & Ford, 1970; Rubin et al., 1980) y la formación de estructuras a gran escala (Davis et al., 1985). En la descripción del modelo estándar, se asume que la materia oscura fría no es bariónica, no emite luz e interactúa solo gravitacionalmente, representando aproximadamente el 26.6 % de la densidad energética del universo.

En conjunto, la densidad de energía asociada a la materia no relativista evoluciona con el factor de escala como

$$\rho_m = \rho_b + \rho_c = (\rho_{b,0} + \rho_{c,0}) a^{-3}. \quad (2.2.25)$$

2.2.6.3. Energía Oscura

Este componente constituye aproximadamente el 70 % de la densidad de energía total del universo y es responsable de la fase actual de expansión acelerada (Planck Collaboration et al., 2020). Su evolución general está caracterizada por la ecuación de conservación

$$\dot{\rho}_{de} + 3H(1 + w_{de}) \rho_{de} = 0, \quad \text{con} \quad w_{de} < -\frac{1}{3}. \quad (2.2.26)$$

En el caso particular en que la energía oscura se identifica con la constante cosmológica Λ , introducida originalmente por Einstein, el parámetro de ecuación de estado es constante y toma el valor

$$w_{de} = -1. \quad (2.2.27)$$

En este escenario, tanto la densidad de energía como la presión asociadas permanecen constantes, satisfaciendo

$$\rho_\Lambda = \frac{c^2}{8\pi G} \Lambda, \quad p_\Lambda = -\rho_\Lambda. \quad (2.2.28)$$

Así, la constante cosmológica puede interpretarse como un componente del universo con densidad constante y presión negativa, lo que conduce naturalmente a una expansión acelerada.

Debido a que el origen físico de la energía oscura sigue siendo desconocido, resulta relevante explorar parametrizaciones alternativas que permitan describir posibles desviaciones respecto del modelo estándar. Entre las extensiones más utilizadas se encuentran:

- Modelo w CDM: asume un parámetro de ecuación de estado constante distinto de -1 , dado por

$$w_{\text{de}} = w_0, \quad \text{con } w_0 \neq -1 \quad (2.2.29)$$

- Modelos $w_0 w_a$ CDM: considera una ecuación de estado dinámica parametrizada mediante la forma propuesta por Chevallier–Polarski–Linder (CPL) (Chevallier & Polarski, 2001; Linder, 2003), expresada como

$$w_{\text{de}}(a) = w_0 + w_a(1 - a). \quad (2.2.30)$$

El modelo Λ CDM se recupera como un caso particular del escenario w CDM al imponer $w_0 = -1$. A su vez, Λ CDM también se obtiene dentro del modelo $w_0 w_a$ CDM cuando se fijan simultáneamente $w_0 = -1$ y $w_a = 0$. En consecuencia, Λ CDM está contenido dentro de ambos esquemas más generales.

2.2.7. Parámetros cosmológicos

Para describir la densidad de energía del universo, resulta conveniente introducir el parámetro de densidad adimensional,

$$\Omega(t) \equiv \frac{\rho(t)}{\rho_{\text{cr}}(t)}, \quad (2.2.31)$$

donde ρ_{cr} corresponde a la densidad crítica, definida como la densidad de energía necesaria para que el universo posea curvatura espacial nula ($K = 0$). Esta densidad se obtiene a partir de la primera ecuación de Friedmann, Ec. (2.2.8), para un universo plano,

$$\rho_{\text{cr}}(t) = \frac{3c^2}{8\pi G} H(t)^2. \quad (2.2.32)$$

La densidad total puede descomponerse como la suma de las contribuciones individuales de los distintos componentes, excluyendo explícitamente el término asociado a la curvatura espacial,

$$\Omega(t) \equiv \sum_i \Omega_i(t) = \sum_i \frac{\rho_i(t)}{\rho_{\text{cr}}(t)}. \quad (2.2.33)$$

Al sustituir estas definiciones en la Ec. (2.2.8) y combinar con la densidad total dada en la Ec. (2.2.18), se obtiene la relación

Tabla 2.2.1: Resumen de las características geométricas espaciales de la métrica de FLRW en función del parámetro de curvatura espacial K .

K	Curvatura	Geometría	Espacio	Ω_K	$\Omega(t)$
0	Nula	Euclídea o plana	Plano	0	1
+1	Positiva	Esférica	Cerrado	< 0	> 1
-1	Negativa	Hiperbólica	Abierto	> 0	< 1

$$\Omega_{\text{tot}}(t) = \Omega(t) + \Omega_K(t), \quad (2.2.34)$$

donde el parámetro de densidad asociado a la curvatura espacial está dado por

$$\Omega_K = -\frac{Kc^2}{a^2 H^2}. \quad (2.2.35)$$

Evaluando esta expresión en el tiempo presente y denotando con subíndices cero los valores actuales de los parámetros cosmológicos, se obtiene

$$\Omega_{\text{tot},0} = \Omega_0 + \Omega_{K,0}, \quad (2.2.36)$$

lo que permite expresar el parámetro de Hubble normalizado $E(t)$ como

$$E(t) \equiv \frac{H(t)}{H_0} = \sqrt{\Omega_{r,0} a^{-4} + \Omega_{m,0} a^{-3} + \Omega_{K,0} a^{-2} + \Omega_{\text{de},0} \frac{\rho_{\text{de}}}{\rho_{\text{de},0}}}. \quad (2.2.37)$$

siendo H_0 la constante de Hubble. Para la componente de energía oscura, la densidad de energía normalizada a su valor presente se define como $f(a) \equiv \rho_{\text{de}}/\rho_{\text{de},0}$. Esta función se obtiene a partir de la ecuación de evolución de la densidad de energía, formulada en la Ec. (2.2.19).

Para el valor actual del factor de escala ($a_0 = 1$), se satisface la siguiente condición de normalización

$$\Omega_{r,0} + \Omega_{m,0} + \Omega_{K,0} + \Omega_{\text{de},0} = 1. \quad (2.2.38)$$

En términos de los parámetros de densidad de energía, la primera ecuación de Friedmann puede reescribirse como

$$1 - \Omega(t) = -\frac{Kc^2}{a^2 H^2}. \quad (2.2.39)$$

De esta expresión se deduce que:

- Si $\Omega = 1$, entonces $K = 0$, el espacio presenta geometría plana.
- Si $\Omega < 1$, entonces $K = -1$, el espacio presenta geometría esférica.
- Si $\Omega > 1$, entonces $K = 1$, el espacio presenta geometría hiperbólica.

Las propiedades geométricas del espacio descritas por la métrica de FLRW se resumen en la Tabla 2.2.1.

2.2.8. Regímenes dinámicos de la expansión

La condición para una expansión acelerada del universo se deduce directamente de la ecuación de aceleración (véase Ec. (2.2.10)). En ausencia de una constante cosmológica ($\Lambda = 0$), dicha ecuación implica que la aceleración cósmica es positiva si y solo si $\rho + 3p < 0$. Para un fluido barotrópico, donde $p = w\rho$ (véase Ec. (2.2.13)), se alcanzan los siguientes regímenes dinámicos, ilustrados en la Fig. 2.2.1:

- Si $w = -1/3$, la aceleración cósmica es nula, es decir, $\ddot{a} = 0$.
- Si $w > -1/3$, se tiene $\ddot{a} < 0$, lo que corresponde a un régimen de expansión desacelerada.
- El universo experimenta una expansión acelerada cuando $\ddot{a} > 0$, lo cual se cumple si $w < -1/3$, o de manera equivalente, si $\gamma < 2/3$.

No obstante, estas condiciones pueden resultar incompatibles con los límites de causalidad definidos en la Ec. (2.2.15) y con las condiciones de energía formuladas originalmente por Hawking y Ellis (Hawking & Ellis, 1973). Específicamente, para un fluido barotrópico con $\omega < 0$, la velocidad del sonido adiabática, definida en la Ec. (2.2.14), resulta imaginaria. Esta situación se asocia a inestabilidades hidrodinámicas, ya que pequeñas perturbaciones no se propagan como ondas estables, sino que pueden experimentar un crecimiento o decaimiento exponencial en el tiempo, dependiendo de las condiciones iniciales y del régimen dinámico considerado (Ryden, 2003).

Sin embargo, esta interpretación no es de carácter general. En el caso de la constante cosmológica ($w = -1$), el fluido no admite perturbaciones dinámicas, por lo que el concepto de velocidad del

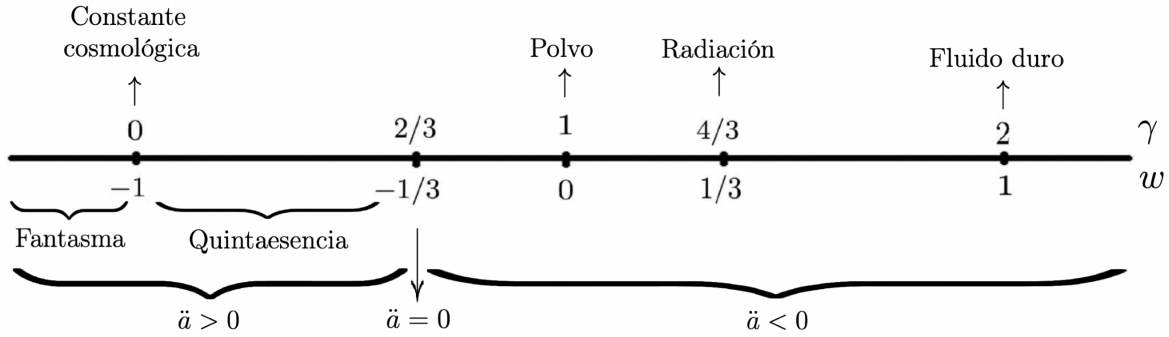


Figura 2.2.1: Valores característicos de los parámetros de ecuación de estado w y γ para distintos componentes cosmológicos. Se indican los regímenes de expansión acelerada ($\ddot{a} > 0$), expansión sin aceleración ($\ddot{a} = 0$) y expansión desacelerada ($\ddot{a} < 0$), así como los casos de constante cosmológica, fantasma, quintaesencia, polvo, radiación y fluido duro.

sonido no resulta aplicable (Padmanabhan, 2003; Mukhanov, 2005). Por otra parte, en modelos de quintaesencia descritos por campos escalares canónicos, es posible tener $w < 0$ manteniendo $c_s^2 = 1$, lo que garantiza la estabilidad causal de las perturbaciones (TsujiKawa, 2013). En contraste, en escenarios de tipo fantasma ($w < -1$), además de violarse las condiciones de energía, suelen aparecer inestabilidades tanto a nivel clásico como cuántico, lo que compromete la viabilidad física de este tipo de modelos (Caldwell, 2002; Carroll et al., 2003).

En este contexto, la clasificación de los fluidos cosmológicos según su parámetro de ecuación de estado puede resumirse de la siguiente manera:

- Para $-1/3 \leq w < 1$ ó $2/3 \leq \gamma < 2$, no se viola ninguna condición de energía. En este régimen, la aceleración cósmica es nula o negativa, correspondiendo a una expansión uniforme o desacelerada. Aquí se incluyen componentes como polvo, radiación y fluidos duros.
- Para $-1 < w < -1/3$ ó $0 \leq \gamma < 2/3$, se viola la condición de energía fuerte, permitiendo una expansión acelerada. A este tipo de fluidos se les denomina quintaesencia.
- Para $w < -1$ ó $\gamma < 0$, se violan tanto la condición de energía fuerte como la condición de energía nula. Este régimen también conduce a la expansión acelerada y se asocia a los denominados fluidos fantasma.

Desde el punto de vista observacional, la expansión acelerada del universo, descubierta mediante observaciones de SNe Ia y corroborada posteriormente a partir de las mediciones de las BAO y el análisis de las anisotropías del CMB, favorece valores del parámetro de ecuación de estado próximos a $w = -1$. No obstante, los datos actuales no excluyen de manera concluyente escenarios

de quintaesencia ni modelos de tipo fantasma dentro de las incertidumbres estadísticas presentes (Riess et al., 1998; Perlmutter et al., 1999; Weinberg et al., 2013; Planck Collaboration et al., 2020; Brout et al., 2022).

2.3. Distancias cosmológicas

Las distancias cosmológicas son una herramienta esencial para comprender la geometría y la dinámica del universo a gran escala. Mediante su definición y medición, es posible relacionar los observables astrofísicos con la historia de expansión cósmica, lo que permite contrastar modelos cosmológicos con los datos observacionales. En este contexto, el corrimiento al rojo cosmológico resulta fundamental, ya que conecta las observaciones con la evolución temporal del factor de escala.

2.3.1. Corrimiento al rojo cosmológico

En cosmología observacional, el corrimiento al rojo (*redshift* en inglés) se utiliza para caracterizar la expansión del universo. Este efecto se manifiesta como un desplazamiento sistemático de las líneas espectrales de la radiación emitida por fuentes distantes hacia longitudes de onda mayores, como consecuencia de la expansión del espacio durante la propagación de la luz. Es importante destacar que, en este contexto, el corrimiento al rojo no debe interpretarse como un efecto Doppler asociado al movimiento de las galaxias en el espacio, sino como una manifestación de la expansión del espacio-tiempo; no obstante, a bajas distancias, las velocidades peculiares pueden introducir contribuciones adicionales al corrimiento al rojo observado.

Dicho corrimiento, denotado por z , se define como

$$z \equiv \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{\text{em}}}{\lambda_{\text{em}}}, \quad (2.3.1)$$

donde λ_{em} corresponde a la longitud de onda emitida por la fuente y λ_{obs} a la longitud de onda medida por un observador comóvil con la expansión cósmica.

En un universo descrito por la métrica de FLRW, la expansión cósmica se caracteriza mediante el factor de escala $a(t)$. La longitud de onda de un fotón se estira en proporción a dicho factor, de modo que se cumple la relación

$$1 + z \equiv \frac{a(t_0)}{a(t)} = \frac{1}{a(t)}, \quad t > t_0, \quad (2.3.2)$$

donde t es el tiempo de emisión del fotón y t_0 es el tiempo actual, correspondiente al instante en que se observa el fotón. En la última igualdad se ha adoptado la convención usual $a(t_0) = 1$. De este modo, el corrimiento al rojo proporciona una medida directa del tamaño relativo del universo en el instante en que el fotón fue emitido, estableciendo una correspondencia entre z y la dinámica de la expansión cósmica.

El parámetro de Hubble se define en función del factor de escala mediante la relación dada en la Ec. (2.2.7). Usando la Ec. (2.3.2), esta definición puede reescribirse en función de z como

$$H(z) = -\frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt}. \quad (2.3.3)$$

De igual manera, el parámetro de Hubble normalizado definido en la Ec. (2.2.37) toma la forma

$$E(z) = \sqrt{\Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{K,0}(1+z)^2 + \Omega_{de,0}f_{de}(z)}, \quad (2.3.4)$$

donde la función $f_{de}(z)$ describe la evolución de la energía oscura y se define como

$$f_{de}(z) \equiv \frac{\rho_{de}(z)}{\rho_{de,0}} = \exp\left(3 \int_0^z \frac{1+w_{de}(z')}{1+z'} dz'\right), \quad (2.3.5)$$

siendo $w_{de}(z)$ el parámetro de ecuación de estado de la energía oscura, el cual puede ser constante o depender explícitamente del corrimiento al rojo, dando lugar a distintas extensiones del modelo cosmológico estándar.

2.3.2. Ley de Hubble

La ley de Hubble constituye un resultado fundamental de la cosmología observacional y surge a partir de la evidencia de la expansión del universo presentada por Edwin Hubble en 1929 (Hubble, 1929). Mediante mediciones de velocidades radiales de galaxias distantes realizadas con el telescopio del Monte Wilson, Hubble encontró una correlación aproximadamente lineal entre el corrimiento al rojo de sus líneas espectrales y la distancia a dichas galaxias, la cual puede expresarse como

$$v = H_0 d, \quad (2.3.6)$$

donde v es la velocidad de recesión radial de la galaxia y d la distancia entre la galaxia y el observador. A partir de sus datos, Hubble estimó un valor de $H_0 \sim 530 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, consi-

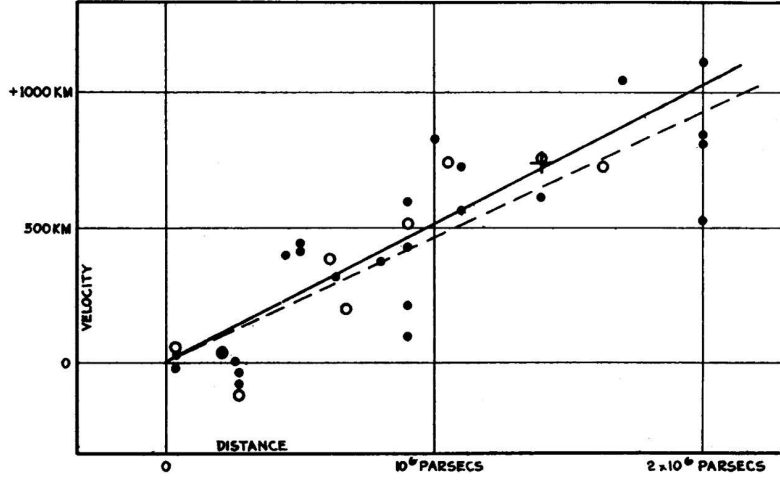


Figura 2.3.1: Diagrama de Hubble original (Hubble, 1929). Relación velocidad–distancia entre galaxias distantes. Las velocidades radiales, corregidas por el movimiento solar, se representan en función de las distancias estimadas.

derablemente superior al aceptado en la actualidad debido, principalmente, a limitaciones en la calibración de distancias.

Esta relación lineal se representa en el denominado diagrama de Hubble presentado en la Fig. 2.3.1, el cual constituye la primera evidencia observacional de la expansión del universo.

2.3.3. Distancia comóvil y propia

La coordenada comóvil radial, denotada por χ , describe la separación entre observadores comóviles que siguen el flujo de Hubble y permanece invariante bajo la expansión cósmica. En términos del corrimiento al rojo, esta coordenada adimensional se expresa como

$$\chi(z) \equiv \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}, \quad (2.3.7)$$

donde $E(z)$ es el parámetro de Hubble normalizado definido en la Ec. (2.3.4).

En términos de esta coordenada, la métrica FLRW adopta la forma

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) [d\chi^2 + S_k^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (2.3.8)$$

donde $S_k(\chi)$ es una función que depende de la curvatura espacial y satisface

$$d\chi^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2}. \quad (2.3.9)$$

A diferencia de la coordenada comóvil, la distancia propia depende explícitamente del tiempo debido a la expansión del universo. Para dos puntos comóviles separados por la coordenada χ , la distancia propia instantánea viene dada por

$$d_p(t) = a(t) \chi. \quad (2.3.10)$$

Utilizando la relación entre el factor de escala y el corrimiento al rojo, Ec. (2.3.2), esta distancia puede expresarse como

$$d_p(z) = \frac{\chi}{1+z}. \quad (2.3.11)$$

La distancia comóvil a lo largo de la línea de visión se obtiene al introducir la distancia de Hubble $d_H(t_0) \equiv c/H_0$, de modo que

$$d_C(z) = \frac{c}{H_0} \chi(z). \quad (2.3.12)$$

Esta cantidad tiene unidades de longitud, usualmente expresadas en Mpc, y corresponde a la separación comóvil entre el observador y una fuente situada a un corrimiento al rojo z .

En presencia de curvatura espacial, la distancia comóvil transversal, también denominada distancia comóvil angular, se define como

$$d_M(z) \equiv \frac{c}{H_0} f_K(\chi), \quad (2.3.13)$$

donde la función $f_K(\chi)$ depende del parámetro de curvatura espacial y está dada por

$$f_K(\chi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\Omega_{K,0}}} \sinh(\sqrt{\Omega_{K,0}} \chi), & \text{si } \Omega_{K,0} > 0, \\ \chi, & \text{si } \Omega_{K,0} = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{|\Omega_{K,0}|}} \sin(\sqrt{|\Omega_{K,0}|} \chi), & \text{si } \Omega_{K,0} < 0. \end{cases} \quad (2.3.14)$$

2.3.4. Distancia de diámetro angular y distancia de luminosidad

Las principales distancias observacionales en cosmología son la distancia de luminosidad d_L y la distancia de diámetro angular d_A . La primera se obtiene a partir de candelas estándar y la segunda mediante reglas estándar (Ryden, 2003).

La distancia de diámetro angular se define como la razón entre la extensión física transversal de una fuente $\ell_\perp$ y el ángulo que esta subtiende en el cielo $\delta\theta$.

$$d_A \equiv \frac{\ell_\perp}{\delta\theta}. \quad (2.3.15)$$

En términos de la distancia comóvil transversal $d_M(z)$, se obtiene que

$$d_A(z) = \frac{d_M(z)}{1+z}. \quad (2.3.16)$$

Por su parte, la distancia de luminosidad se define a partir de la relación entre la luminosidad intrínseca L de una fuente y el flujo observado F ,

$$d_L = \left(\frac{L}{4\pi F} \right)^{1/2}. \quad (2.3.17)$$

En un universo descrito por una teoría métrica de la gravedad, las distancias d_L y d_A están relacionadas mediante la ecuación de dualidad de Etherington,

$$d_L(z) = (1+z)^2 d_A(z), \quad (2.3.18)$$

válida siempre que se conserve el número de fotones y que estos se propaguen a lo largo de geodésicas nulas. En términos de la distancia comóvil transversal, la distancia de luminosidad puede escribirse como

$$d_L(z) = (1+z) d_M(z). \quad (2.3.19)$$

Capítulo 3

Cosmología disipativa

3.1. Descripción general

Al suponer que el universo contiene uno o más componentes que experimentan procesos disipativos durante su evolución cósmica, resulta necesario incluir la expresión general del tensor de energía-momento para incorporar las correcciones asociadas a dichos procesos. Estas correcciones representan las desviaciones respecto al comportamiento de un fluido perfecto y están vinculadas a efectos de fricción interna, transporte de energía y producción de entropía.

La contribución disipativa al tensor de energía-momento puede escribirse como

$$\Delta T^{\mu\nu} = q^\mu u^\nu + q^\nu u^\mu + \Pi h^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu}, \quad (3.1.1)$$

donde q^μ es el vector de flujo de calor, Π representa la presión de viscosidad de volumen, $\pi^{\mu\nu}$ corresponde al tensor de viscosidad de cizalladura y $h^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu$ es el tensor de proyección.

En términos generales, el tensor de energía-momento para un fluido relativista imperfecto se expresa como

$$\begin{aligned} T_{\text{tot}}^{\mu\nu} &\equiv \mathcal{T}^{\mu\nu} + \Delta T^{\mu\nu} \\ &= (\rho + p + \Pi) u^\mu u^\nu + (p + \Pi) g^{\mu\nu} + q^\mu u^\nu + q^\nu u^\mu + \pi^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

donde $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento de un fluido perfecto, definido en la Ec. (2.2.1), ρ denota la densidad de energía y p es la presión adiabática. En consecuencia, la presencia de la viscosidad de volumen modifica la presión adiabática del fluido cósmico, dando lugar a una presión efectiva definida como

$$\mathcal{P}_{\text{eff}} \equiv p + \Pi. \quad (3.1.3)$$

En el caso de la materia no relativista, la presión adiabática satisface $p = 0$, por lo que la presión efectiva queda determinada únicamente por la contribución viscosa Π .

Al imponer las simetrías de homogeneidad e isotropía propias de la métrica FLRW, la única corrección disipativa compatible a nivel de fondo cosmológico es la viscosidad de volumen. Por consiguiente, el tensor de energía-momento se simplifica a

$$T^{\mu\nu} \equiv (\rho + \mathcal{P}_{\text{eff}}) u^\mu u^\nu + \mathcal{P}_{\text{eff}} g^{\mu\nu}. \quad (3.1.4)$$

De manera análoga, se introduce el vector de cuatricorrente de partículas N^μ , que en presencia de efectos disipativos adopta la forma

$$N^\mu = n u^\mu + \Delta N^\mu, \quad (3.1.5)$$

donde n es la densidad numérica de partículas que componen el fluido, y ΔN^μ representa la contribución disipativa asociada al transporte no ideal de partículas. Tanto el tensor de energía-momento total como la cuatricorrente de partículas satisfacen leyes de conservación covariantes, lo que conduce a sus respectivas ecuaciones de evolución

$$\nabla_\nu T_{\text{tot}}^{\mu\nu} = 0, \quad (3.1.6)$$

$$\nabla_\mu N^\mu = 0. \quad (3.1.7)$$

A partir de la combinación de las Ecs. (3.1.5) y (3.1.7) se obtiene la ecuación de evolución para la densidad numérica,

$$\dot{n} + \vartheta n = 0, \quad (3.1.8)$$

donde $\dot{n} \equiv u^\mu \nabla_\mu n$ es la derivada convectiva de n y ϑ corresponde a la expansión escalar, definida como $\vartheta \equiv \nabla_\mu u^\mu$. Para un fluido comóvil en una geometría FLRW, con $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$, esta cantidad se reduce a

$$\vartheta = 3 \frac{\dot{a}}{a} \equiv 3H \quad (3.1.9)$$

donde a es el factor de escala y H el parámetro de Hubble.

A diferencia de un fluido perfecto, cuyo comportamiento es reversible y no produce entropía, la incorporación de términos disipativos introduce irreversibilidad en la evolución del fluido. Como consecuencia, la entropía deja de conservarse y la cuadracorriente de entropía incorpora una contribución adicional asociada a los procesos disipativos, la cual puede expresarse como

$$S^\mu = sN^\mu + \frac{W^\mu}{T}, \quad (3.1.10)$$

donde $W^\mu \equiv W^\mu(N^\mu, T^{\mu\nu})$ corresponde a la parte disipativa, que se anula en equilibrio, s es la entropía por partícula y T es la temperatura del fluido. Ambas cantidades se relacionan a través de la ecuación de Gibbs,

$$Tds = d\left(\frac{\rho}{n}\right) + pd\left(\frac{1}{n}\right). \quad (3.1.11)$$

En termodinámica relativista, la producción de entropía está determinada por la divergencia de la cuadracorriente de entropía. En tal caso, la segunda ley adopta la forma covariante

$$\nabla_\mu S^\mu \geq 0. \quad (3.1.12)$$

Estas relaciones constituyen el punto de partida para la construcción de modelos cosmológicos disipativos en el contexto de la termodinámica relativista, tales como el formalismo de Eckart (Eckart, 1940) y el de Israel-Stewart (Israel, 1976; Israel & Stewart, 1979), los cuales difieren en el tratamiento de la causalidad, la estabilidad y la formulación constitutiva de los términos viscosos.

3.1.1. Teoría termodinámica de primer orden

La teoría termodinámica de primer orden constituye la formulación relativista más simple para describir fluidos con disipación. En este enfoque, la descripción se restringe a términos de primer orden en las desviaciones respecto al equilibrio termodinámico local, lo que conduce a relaciones constitutivas algebraicas y lineales para las variables disipativas. Las formulaciones relativistas de primer orden fueron desarrolladas de manera independiente por Eckart (Eckart, 1940) y por Landau y Lifshitz (Landau & Lifshitz, 1959), dando lugar a dos elecciones distintas para la definición del cuadvectores velocidad u^μ .

En el formalismo de Eckart, u^μ se identifica con la velocidad asociada al transporte de partículas en el fluido, mientras que en el enfoque de Landau–Lifshitz se asocia con la velocidad de transporte

de la energía. En el presente trabajo se adopta el formalismo de Eckart para la descripción del fluido cosmológico, ya que en esta formulación la presión viscosa aparece de manera directa como una corrección a la presión de equilibrio del fluido.

De acuerdo con esta elección de u^μ , en el sistema de referencia comóvil no existe corriente espacial de partículas; es decir, $N^i \equiv 0$. En un sistema de referencia de Lorentz general, los términos disipativos satisfacen las siguientes condiciones:

$$u_\mu u_\nu \Delta T^{\mu\nu} = 0 \quad \text{y} \quad \Delta N^\mu = 0, \quad (3.1.13)$$

lo que implica que las correcciones disipativas no contribuyen a la densidad de energía en el sistema comóvil y que la cuadricorriente de partículas no contiene términos disipativos.

En la teoría de Eckart, se asume que el cuadvivector R^μ introducido en la Ec. (3.1.14) depende linealmente y de forma algebraica de u^μ , así como de las componentes disipativas. Bajo esta hipótesis, la única cantidad que puede representar de forma consistente a R^μ es el flujo de calor (Eckart, 1940; Maartens, 1996; Piattella et al., 2011). En consecuencia, la cuadricorriente de entropía adopta la forma

$$S^\mu = snu^\mu + \frac{q^\mu}{T}. \quad (3.1.14)$$

Como se señaló previamente, bajo las simetrías de la métrica FLRW, el único término disipativo permitido es la viscosidad de volumen. En consecuencia, $S^\mu = snu^\mu$, mientras que la contribución disipativa, definida en la Ec. (3.1.1), se reduce a

$$\Delta T^{\mu\nu} \equiv \Pi h^{\mu\nu}, \quad (3.1.15)$$

donde Π está asociada con la expansión escalar del fluido y, al utilizar la expresión dada en la Ec. (3.1.9), puede escribirse como

$$\Pi \equiv -\zeta\vartheta = -3H\zeta, \quad (3.1.16)$$

siendo ζ el coeficiente de viscosidad de volumen, también llamado segunda viscosidad, el cual caracteriza la respuesta disipativa del fluido frente a procesos de expansión o compresión (Liebermann, 1949).

La Ec. (3.1.16) implica que la respuesta del fluido frente a cambios en la expansión es instantánea, lo que refleja la ausencia de un tiempo de relajación característico. Como consecuencia,

este formalismo presenta problemas de causalidad y puede dar lugar a inestabilidades frente a perturbaciones lineales. No obstante, la teoría de Eckart constituye una aproximación de primer orden que permite modelar de manera sencilla los efectos disipativos.

Asimismo, la segunda ley de la termodinámica, expresada de forma covariante en la Ec. (3.1.12), impone la condición

$$\nabla_\mu S^\mu \equiv -\frac{\Pi}{T}\vartheta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \zeta\vartheta^2 \geq 0. \quad (3.1.17)$$

Dado que $\vartheta^2 > 0$, esta relación implica que el coeficiente de viscosidad de volumen debe satisfacer

$$\zeta \geq 0. \quad (3.1.18)$$

3.1.2. Teoría termodinámica de segundo orden

La teoría termodinámica de segundo orden surge como una extensión natural de las formulaciones de primer orden, con el objetivo de superar los problemas de causalidad y estabilidad inherentes a dichas teorías. En este enfoque, las cantidades disipativas se tratan como variables dinámicas independientes, cuya evolución ocurre en escalas temporales finitas caracterizadas por tiempos de relajación.

Esta formulación fue desarrollada originalmente por Müller (Müller, 1967) y posteriormente establecida de manera consistente por Israel y Stewart (Israel, 1976; Israel & Stewart, 1979). La inclusión de correcciones de segundo orden en la cuadricorriente de entropía permite derivar ecuaciones de transporte causales para los flujos disipativos, garantizando velocidades de propagación sublumínicas y estabilidad del sistema frente a pequeñas perturbaciones.

Cuando se consideran desviaciones de segundo orden respecto al equilibrio, la cuadricorriente de entropía adopta la forma

$$S^\mu = sN^\mu - \frac{\tau\Pi^2}{2\zeta T}u^\mu, \quad (3.1.19)$$

donde τ el tiempo de relajación asociado al proceso disipativo. A partir de esta expresión, la divergencia de S^μ puede escribirse como

$$\nabla_\mu S^\mu = -\frac{\Pi}{T} \left[\vartheta + \frac{\tau\dot{\Pi}}{\zeta} + \frac{\tau\Pi}{2\zeta} \left(\vartheta + \frac{\dot{\tau}}{\tau} - \frac{\dot{\zeta}}{\zeta} - \frac{\dot{T}}{T} \right) \right]. \quad (3.1.20)$$

Con el fin de garantizar la validez de la segunda ley de la termodinámica, la teoría de Israel-Stewart propone que la presión viscosa satisface la siguiente ecuación de transporte

$$\tau \dot{\Pi} + \Pi = -3H \zeta - \frac{\varepsilon}{2} \tau \Pi \left(3H + \frac{\dot{\tau}}{\tau} - \frac{\dot{\zeta}}{\zeta} - \frac{\dot{T}}{T} \right), \quad (3.1.21)$$

donde ε es un parámetro adimensional. Dependiendo del valor de este parámetro, la ecuación anterior se reduce a

- la versión truncada de Israel-Stewart (IST), cuando $\varepsilon = 0$, y
- la teoría completa de Israel-Stewart (ISC), cuando $\varepsilon = 1$.

Ambas formulaciones difieren en el tratamiento de los términos de segundo orden en la evolución de las cantidades disipativas. Por otra parte, en el límite $\tau = 0$ se recupera la teoría de Eckart.

En este formalismo, τ caracteriza la escala temporal en la cual un sistema perturbado regresa al equilibrio termodinámico. Los análisis de causalidad y estabilidad de la teoría de Israel-Stewart, presentados en (Maartens, 1996), permiten relacionar este tiempo con la velocidad característica asociada a las perturbaciones viscosas de volumen, definida como

$$c_b^2 \equiv c^2 \frac{\zeta}{(\rho + p) \tau}, \quad (3.1.22)$$

donde c_b representa la velocidad de propagación de dichas perturbaciones. Esta cantidad corresponde a la contribución disipativa a la velocidad del sonido total v , dada por

$$v^2 = c_s^2 + c_b^2, \quad (3.1.23)$$

siendo c_s la velocidad adiabática del sonido, definida en la Ec. (2.2.14). La condición de causalidad exige que $v^2 \leq c^2$, donde c es la velocidad de la luz. Adicionalmente, considerando la ecuación de Gibbs definida en la Ec. (3.1.11), de la cual se deriva la condición de integrabilidad de Gibbs

$$n \frac{\partial T}{\partial n} + (\rho + p) \frac{\partial T}{\partial \rho} = T \frac{\partial p}{\partial \rho}, \quad (3.1.24)$$

y asumiendo una ecuación de estado $p = p(\rho, n)$ y una temperatura $T = T(\rho, n)$, se obtiene la siguiente ecuación de evolución para la temperatura

$$\frac{\dot{T}}{T} = -3H \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_n + \frac{\Pi}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \right)_n \right], \quad (3.1.25)$$

donde el segundo término de la derecha muestra que la presión viscosa actúa contrarrestando el enfriamiento inducido por la expansión cosmológica. En particular,

$$\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial \rho} = \frac{c_s^2}{\rho + p}. \quad (3.1.26)$$

Para un fluido barotrópico descrito mediante una ecuación de estado del tipo $p = p(\rho)$, como se define en la Ec. (2.2.13), se obtiene

$$\frac{\dot{T}}{T} = -3H c_s^2 \left[1 + \frac{\Pi}{\rho + p} \right]. \quad (3.1.27)$$

Bajo la condición de cuasiequilibrio $|\Pi| \ll p$, y utilizando la Ec. (2.2.13), se tiene además $|\Pi| \ll \rho$. Por lo tanto,

$$\frac{\dot{T}}{T} = -3H c_s^2. \quad (3.1.28)$$

3.2. Ecuaciones de fondo para un universo con viscosidad

En un universo que experimenta procesos disipativos asociados a la presencia de fluidos viscosos de tipo volumen, las ecuaciones de Friedmann se ven modificadas con respecto al caso de un fluido perfecto. En este contexto, las ecuaciones de Friedmann, dadas originalmente por las Ecs. (2.2.8) y (2.2.9), pueden escribirse como

$$H^2 \equiv \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_{\text{tot}} = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho - \frac{Kc^2}{a(t)^2}, \quad (3.2.1)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 \equiv -\frac{8\pi G}{c^2} p_{\text{tot}} = -\frac{8\pi G}{c^2} (p + \mathcal{P}_{\text{eff}}) - \frac{Kc^2}{a(t)^2}, \quad (3.2.2)$$

donde $\mathcal{P}_{\text{eff}}$ corresponde a la contribución efectiva debida a la viscosidad de tipo volumen, tal como se define en la Ec. (3.1.3). De igual forma, la ecuación de conservación del tensor energía-momento, presentada en Ec. (2.2.12), se reformula como

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + \mathcal{P}_{\text{eff}}) = 0. \quad (3.2.3)$$

Capítulo 4

Modelos cosmológicos con viscosidad de volumen

En este capítulo se presenta el desarrollo central de esta tesis doctoral. A partir de los fundamentos teóricos expuestos previamente, se formulan modelos cosmológicos que incorporan viscosidad de volumen en la materia oscura fría, considerando los formalismos de Eckart e Israel-Stewart dentro de la métrica FLRW. Asimismo, se derivan las ecuaciones dinámicas que gobiernan la evolución de los modelos estudiados, sobre las cuales se basa el análisis observacional desarrollado en los capítulos siguientes.

4.1. Teoría de Eckart

La simplicidad de la teoría de Eckart ha favorecido su uso extensivo en cosmología disipativa. Sin embargo, presenta limitaciones conceptuales: (i) viola la causalidad, ya que las perturbaciones se propagan a velocidad infinita, y (ii) puede generar inestabilidades hidrodinámicas en el análisis perturbativo bajo ciertas condiciones. A pesar de ello, como aproximación efectiva de primer orden, proporciona una descripción inicial útil para explorar el impacto de la viscosidad en la dinámica de la expansión cósmica. Por esta razón, en esta tesis se adopta como punto de partida para el estudio de modelos viscosos de tipo volumen, tanto en escenarios con curvatura espacial como en el caso plano.

4.1.1. Modelos con materia oscura fría viscosa

Suponiendo que la materia oscura fría es el único componente del Universo que experimenta procesos disipativos asociados a la viscosidad de volumen, y que no existe interacción entre los dos fluidos cósmicos, la ecuación de conservación definida en la Ec. (3.2.3) para este componen-

te se reescribe en función del corrimiento al rojo mediante la transformación presentada en la Ec. (2.3.3). Usando la notación $' \equiv d/dz$, la ecuación de conservación toma la forma:

$$\rho'_{\text{vc}} = \frac{3}{1+z} (\rho_{\text{vc}} + \mathcal{P}_{\text{vc,eff}}), \quad (4.1.1)$$

donde se adopta la notación “vc” para identificar esta componente viscosa en todas las cantidades físicas relevantes. La presión efectiva se define, de acuerdo con las Ecs. (3.1.3) y (3.1.16), como:

$$\mathcal{P}_{\text{vc,eff}} \equiv p_{\text{vc}} + \Pi_{\text{vc}} = -3H\zeta, \quad \text{con } p_{\text{vc}} = 0. \quad (4.1.2)$$

La tasa de expansión normalizada, definida en la Ec. (2.3.4), se modifica al incorporar la contribución viscosa, quedando expresada como

$$E_{\text{vc}}(z) = \sqrt{\Omega_{\text{r},0}(1+z)^4 + \Omega_{\text{b},0}(1+z)^3 + \Omega_{\text{vc}}(z) + \Omega_{\text{K},0}(1+z)^2 + \Omega_{\text{de},0} f_{\text{de}}(z)}, \quad (4.1.3)$$

donde la función $f_{\text{de}}(z) \equiv \rho_{\text{de}}/\rho_{\text{de},0}$ describe la evolución de la densidad de energía oscura, tal como se define en la Ec. (2.3.5). Asimismo, $\Omega_{\text{vc}}(z)$ representa el parámetro de densidad de energía de la materia oscura fría viscosa de tipo volumen (vCDM, por su sigla en inglés, *viscous Cold Dark Matter*), que se formula como

$$\Omega_{\text{vc}}(z) = \frac{8\pi G \rho_{\text{vc}}(z)}{3H_0^2 c^2}, \quad (4.1.4)$$

de modo que, en el presente,

$$\Omega_{\text{vc}}(z=0) \equiv \Omega_{\text{vc},0}. \quad (4.1.5)$$

En adelante, se omite la dependencia explícita en z , escribiendo $\Omega_{\text{vc}} \equiv \Omega_{\text{vc}}(z)$. El conjunto restante de parámetros se define de manera general como

$$\Omega_{i,0} = \frac{8\pi G \rho_{i,0}}{3H_0^2 c^2}. \quad (4.1.6)$$

Estos parámetros satisfacen la siguiente relación:

$$\Omega_{\text{de},0} = 1 - (\Omega_{\text{r},0} + \Omega_{\text{b},0} + \Omega_{\text{vc},0} + \Omega_{\text{K},0}). \quad (4.1.7)$$

En este contexto, la densidad de energía de la ν CDM puede calcularse a partir de la ecuación de conservación definida en la Ec. (4.1.1), reformulada en términos de cantidades adimensionales considerando la Ec. (4.1.4), tal como se describe en (Velten & Schwarz, 2012; Velten et al., 2014). Dicha ecuación se resuelve numéricamente, imponiendo la condición inicial presentada en la Ec. (4.1.5). De este modo, se obtiene

$$(1+z)\Omega'_{\nu c} - 3\Omega_{\nu c} + \zeta^* \left[\Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{b,0}(1+z)^3 + \Omega_{\nu c} + \Omega_{K,0}(1+z)^2 + \Omega_{de,0}f_{de}(z) \right]^{1/2} = 0, \quad (4.1.8)$$

donde se ha definido el parámetro de viscosidad adimensional ζ^* como

$$\zeta^* = \frac{24\pi G}{c^2} \frac{\zeta}{H_0}. \quad (4.1.9)$$

La elección del coeficiente de viscosidad de volumen ζ , que aparece en la definición anterior, constituye un aspecto fundamental en la descripción de los fluidos viscosos.

Entre las diversas parametrizaciones propuestas en la literatura para la viscosidad de volumen, como las presentadas en (Velten & Schwarz, 2012; Cruz et al., 2018, 2023), se considera aquí aquella en la que el coeficiente de viscosidad evoluciona según una ley de potencia de la forma:

$$\zeta = \zeta_0 \left(\frac{\Omega_{\nu c}}{\Omega_{\nu c,0}} \right)^m, \quad (4.1.10)$$

donde ζ_0 es la viscosidad en la época actual y $m \in \mathbb{R}$ es el índice de viscosidad. Este índice es un parámetro libre del modelo que determina cómo escala ζ con la densidad de materia oscura y, por ende, con la expansión del Universo. El significado físico del índice m se interpreta de la siguiente manera:

- Para $m > 0$, la viscosidad es proporcional a una potencia positiva de la densidad. Por lo tanto, disminuye con la expansión del Universo, siendo más relevante en etapas tempranas y densas.
- Para $m < 0$, la viscosidad escala inversamente con la densidad. En consecuencia, aumenta con la expansión, lo que podría hacerla dominante en la época actual o futura.
- El caso $m = 0$ representa un escenario sin evolución, donde la viscosidad es constante. Este es el modelo más simple y sirve como punto de referencia.

Al combinar las Ecs. (4.1.9) y (4.1.10), la ecuación de conservación formulada en la Ec. (4.1.8) se redefine en términos de un nuevo parámetro de viscosidad adimensional. De esta forma, se obtiene

$$\zeta^* = \tilde{\zeta}_0 \left(\frac{\Omega_{\text{vc}}}{\Omega_{\text{vc},0}} \right)^m, \quad \text{con} \quad \tilde{\zeta}_0 = \frac{24\pi G}{c^2} \frac{\zeta_0}{H_0}. \quad (4.1.11)$$

Esta nueva formulación permite un cálculo numérico más eficiente y estable al resolver el sistema de ecuaciones diferenciales del modelo.

La descripción dinámica de la expansión cósmica se completa con la ecuación de evolución para el parámetro de Hubble, derivada de la segunda ecuación de Friedmann, específicamente de la Ec. (3.2.2) para un Universo con Λ CDM, y reescrita en términos del corrimiento al rojo mediante la transformación dada en la Ec. (2.3.3), la cual adopta la forma:

$$2(1+z)HH' - 3H^2 + \zeta^*HH_0 - H_0^2 \left[\Omega_{\text{r},0}(1+z)^4 - \Omega_{\text{K},0}(1+z)^2 + 3w_{\text{de}}\Omega_{\text{de},0}f_{\text{de}}(z) \right] = 0, \quad (4.1.12)$$

donde w_{de} representa la ecuación de estado de la energía oscura. Dependiendo de la parametrización adoptada para w_{de} , la cual puede ser constante o depender explícitamente del corrimiento al rojo, se obtienen distintas variantes del modelo.

4.1.1.1. Inclusión de la constante cosmológica

En los modelos viscosos con constante cosmológica, denominados Λ vCDM, se asume una ecuación de estado para la energía oscura, dada por $w_{\text{de}} = -1$. En consecuencia, la densidad de energía oscura permanece constante a lo largo de la evolución cosmológica, de modo que $f_{\text{de}}(z) = f_{\Lambda} = 1$. Al sustituir esta condición, junto con la parametrización del coeficiente de viscosidad definida en la Ec. (4.1.11), en la ecuación de conservación general expresada en la Ec. (4.1.8), se obtiene la ecuación de evolución para Ω_{vc} específica de este modelo:

$$(1+z)\Omega'_{\text{vc}} - 3\Omega_{\text{vc}} + \tilde{\zeta}_0 \left(\frac{\Omega_{\text{vc}}}{\Omega_{\text{vc},0}} \right)^m \left[\Omega_{\text{r},0}(1+z)^4 + \Omega_{\text{b},0}(1+z)^3 + \Omega_{\text{vc}} + \Omega_{\text{K},0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda} \right]^{1/2} = 0. \quad (4.1.13)$$

Así como la correspondiente ecuación de evolución para $H(z)$, deducida a partir de la Ec. (4.1.12):

$$\begin{aligned}
2(1+z)HH' - 3H^2 + \tilde{\zeta}_0 \left(\frac{\Omega_{\text{vc}}}{\Omega_{\text{vc},0}} \right)^m HH_0 \\
- H_0^2 \left[\Omega_{\text{r},0}(1+z)^4 - \Omega_{\text{K},0}(1+z)^2 - 3\Omega_{\Lambda} \right] = 0.
\end{aligned} \tag{4.1.14}$$

4.1.1.2. Inclusión de energía oscura constante

En el caso de los modelos viscosos con energía oscura constante, denominados $w\text{VCDM}$, se asume una ecuación de estado constante para la energía oscura, $w_{\text{de}} = w_0$, con $w_0 \neq -1$. Al resolver de forma analítica la Ec. (2.3.5), se obtiene la evolución de la densidad de energía oscura, dada por

$$f_{\text{de}}(z) = (1+z)^{3(1+w_0)}. \tag{4.1.15}$$

Al reemplazar esta función y el coeficiente de viscosidad adimensional introducido en la Ec. (4.1.11) en la Ec. (4.1.8), se obtiene la ecuación de evolución para Ω_{vc} , que puede expresarse como:

$$\begin{aligned}
(1+z)\Omega'_{\text{vc}} - 3\Omega_{\text{vc}} + \tilde{\zeta}_0 \left(\frac{\Omega_{\text{vc}}}{\Omega_{\text{vc},0}} \right)^m \left[\Omega_{\text{r},0}(1+z)^4 \right. \\
\left. + \Omega_{\text{b},0}(1+z)^3 + \Omega_{\text{vc}} + \Omega_{\text{K},0}(1+z)^2 + \Omega_{\text{de},0}(1+z)^{3(1+w_0)} \right]^{1/2} = 0.
\end{aligned} \tag{4.1.16}$$

De manera análoga, se obtiene la ecuación de evolución para $H(z)$:

$$\begin{aligned}
2(1+z)HH' - 3H^2 + \tilde{\zeta}_0 \left(\frac{\Omega_{\text{vc}}}{\Omega_{\text{vc},0}} \right)^m HH_0 - H_0^2 \left[\Omega_{\text{r},0}(1+z)^4 \right. \\
\left. - \Omega_{\text{K},0}(1+z)^2 + 3w_0 \Omega_{\text{de},0}(1+z)^{3(1+w_0)} \right] = 0.
\end{aligned} \tag{4.1.17}$$

4.1.1.3. Inclusión de energía oscura dinámica

En los modelos viscosos con energía oscura dinámica, denominados $w_0w_a\text{VCDM}$, se considera la parametrización CPL (Chevallier & Polarski, 2001; Linder, 2003) para la ecuación de estado dada por

$$w_{\text{de}}(z) = w_0 + w_a \left(\frac{z}{1+z} \right), \tag{4.1.18}$$

donde w_0 representa el valor actual de la ecuación de estado, mientras que w_a describe su evolución con el corrimiento al rojo. A partir de la Ec. (2.3.5), se obtiene que

$$f_{\text{de}}(z) = (1+z)^{3(1+w_0+w_a)} e^{-3w_a(\frac{z}{1+z})}. \quad (4.1.19)$$

Al sustituir las Ecs. (4.1.18) y (4.1.11) en la ecuación de conservación y en la ecuación de evolución de $H(z)$, definidas respectivamente en las Ecs. (4.1.8) y (4.1.12), se obtienen las correspondientes ecuaciones dinámicas del modelo. En particular, la evolución de Ω_{vc} queda descrita por

$$(1+z)\Omega'_{\text{vc}} - 3\Omega_{\text{vc}} + \tilde{\zeta}_0 \left(\frac{\Omega_{\text{vc}}}{\Omega_{\text{vc},0}} \right)^m \left[\Omega_{\text{r},0}(1+z)^4 + \Omega_{\text{b},0}(1+z)^3 + \Omega_{\text{vc}} + \Omega_{\text{K},0}(1+z)^2 + \Omega_{\text{de},0}(1+z)^{3(1+w_0+w_a)} e^{-3w_a(\frac{z}{1+z})} \right]^{1/2} = 0, \quad (4.1.20)$$

mientras que la ecuación correspondiente para $H(z)$ se expresa como

$$2(1+z)HH' - 3H^2 + \tilde{\zeta}_0 \left(\frac{\Omega_{\text{vc}}}{\Omega_{\text{vc},0}} \right)^m HH_0 - H_0^2 \left[\Omega_{\text{r},0}(1+z)^4 - \Omega_{\text{K},0}(1+z)^2 + 3w_{\text{de}}(z)\Omega_{\text{de},0}(1+z)^{3(1+w_0+w_a)} e^{-3w_a(\frac{z}{1+z})} \right] = 0. \quad (4.1.21)$$

4.1.2. Resumen de los modelos cosmológicos viscosos considerados

En esta tesis se analizan modelos cosmológicos con materia oscura fría viscosa de tipo volumen en presencia de una constante cosmológica, considerando tanto geometrías espacialmente planas como con curvatura. Estos escenarios corresponden a los modelos ΛvCDM y $\Lambda\text{vCDM} + \Omega_{\text{K}}$, los cuales constituyen el punto de partida del estudio.

A partir de esta base, el análisis se extiende a modelos con ecuaciones de estado más generales para la energía oscura, específicamente $w\text{VCDM}$ y $w_0w_a\text{VCDM}$, en sus versiones planas y con curvatura. En todos los casos, el coeficiente de viscosidad se parametriza según la Ec. (4.1.11), considerando tanto un escenario de viscosidad constante ($m = 0$), que representa el caso más simple, como uno de viscosidad variable, en el cual el índice m se trata como un parámetro libre. En ambos escenarios, el parámetro de viscosidad adimensional $\tilde{\zeta}_0$ se considera igualmente un parámetro libre del modelo. Las ecuaciones de continuidad y de evolución del parámetro de Hubble se obtienen siguiendo un procedimiento común, descrito en las secciones anteriores.

Tabla 4.1.1: Resumen de los modelos viscosos Λ vCDM, w VCDM y w_0w_a VCDM en el formalismo de Eckart. Se clasifican según el índice de viscosidad m , el coeficiente ζ y su forma adimensional ζ^* , junto con las correspondientes ecuaciones de continuidad. Para cada modelo se consideran las versiones espacialmente planas y con curvatura.

Modelos	ζ	ζ^*	Ecuación de continuidad
$m = 0$			
Λ vCDM1 (+ Ω_K)	ζ_0	$\tilde{\zeta}_0$	$(1+z)\Omega'_{\text{vc}} - 3\Omega_{\text{vc}} + \tilde{\zeta}_0 E_{\text{vc}}(z) = 0$
w VCDM1 (+ Ω_K)			
w_0w_a VCDM1 (+ Ω_K)			
m libre			
Λ vCDM2 (+ Ω_K)	$\zeta_0 \left(\frac{\Omega_{\text{vc}}}{\Omega_{\text{vc},0}} \right)^m$	$\tilde{\zeta}_0 \left(\frac{\Omega_{\text{vc}}}{\Omega_{\text{vc},0}} \right)^m$	$(1+z)\Omega'_{\text{vc}} - 3\Omega_{\text{vc}} + \tilde{\zeta}_0 \left(\frac{\Omega_{\text{vc}}}{\Omega_{\text{vc},0}} \right)^m E_{\text{vc}}(z) = 0$
w VCDM2 (+ Ω_K)			
w_0w_a VCDM2 (+ Ω_K)			
Ecuación de evolución de $H(z)$			
$2(1+z)HH' - 3H^2 + \tilde{\zeta}_0 \left(\frac{\Omega_{\text{vc}}}{\Omega_{\text{vc},0}} \right)^m HH_0 - H_0^2[\Omega_{r,0}(1+z)^4 - \Omega_{K,0}(1+z)^2 + 3w_{\text{de}}(z)\Omega_{\text{de},0}f_{\text{de}}(z)] = 0$			
Parámetro de Hubble normalizado			
$E_{\text{vc}}(z) = \left[\Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{b,0}(1+z)^3 + \Omega_{\text{vc}} + \Omega_{K,0}(1+z)^2 + \Omega_{\text{de},0}f_{\text{de}}(z) \right]^{1/2}$			
$f_{\text{de}}(z) = \begin{cases} 1 & \text{con } w_{\text{de}}(z) = -1 & (\Lambda\text{vCDM}) \\ (1+z)^{3(1+w_0)} & \text{con } w_{\text{de}}(z) = w_0 & (w\text{VCDM}) \\ (1+z)^{3(1+w_0+w_a)}e^{-3w_a\left(\frac{z}{1+z}\right)} & \text{con } w_{\text{de}}(z) = w_0 + w_a\left(\frac{z}{1+z}\right) & (w_0w_a\text{VCDM}) \end{cases}$			

En la Tabla 4.1.1 se presenta un resumen del conjunto completo de modelos considerados, donde la notación adoptada distingue explícitamente entre los escenarios con $m = 0$ y m libre mediante las numeraciones 1 y 2 incorporadas en el nombre del modelo, respectivamente.

4.2. Teoría de Israel-Stewart

La teoría de Israel–Stewart constituye una formulación relativista de segundo orden de la hidrodinámica disipativa, que supera las limitaciones de la teoría de Eckart al introducir un tiempo de relajación característico. Esta inclusión garantiza la causalidad y la estabilidad del

sistema, evitando la propagación instantánea de perturbaciones. En consecuencia, constituye un formalismo más consistente para el estudio de fluidos viscosos en cosmología y para el análisis de los efectos disipativos sobre la dinámica de la expansión cósmica. Por esta razón, en esta sección se adopta el formalismo de Israel–Stewart como una descripción físicamente más realista para investigar modelos con materia oscura fría viscosa, permitiendo analizar el impacto de los procesos disipativos en una formulación causal y estable.

4.2.1. Modelos con materia oscura fría viscosa y constante cosmológica

La presión viscosa satisface la ecuación de transporte definida en la Ec. (3.1.21). Al reescribirla en términos del corrimiento al rojo, se obtiene

$$\tau\Pi' - \frac{\Pi}{(1+z)H} = \frac{3\zeta}{1+z} + \frac{\varepsilon}{2}\tau\Pi\left(\frac{3}{1+z} - \frac{\tau'}{\tau} + \frac{\zeta'}{\zeta} + \frac{T'}{T}\right). \quad (4.2.1)$$

Manteniendo la misma hipótesis adoptada en el formalismo de Eckart, se asume que la materia oscura fría es el único componente del Universo que experimenta procesos disipativos asociados a la viscosidad de volumen. El tiempo de relajación, definido de manera general en la Ec. (3.1.22), se particulariza para el modelo ν CDM como

$$\tau = \frac{\zeta c^2}{(\rho_{\text{vc}} + p_{\text{vc}})c_b^2}, \quad \text{con } p_{\text{vc}} = 0, \quad (4.2.2)$$

donde, para el coeficiente de viscosidad de volumen ζ , se adopta el mismo *ansatz* introducido previamente en la formulación de Eckart (véase Sec. 4.1.1), dado por la Ec. (4.1.10). Además, con el fin de reducir la complejidad del sistema, se desprecia la contribución de la radiación. En estas condiciones, para la mezcla cosmológica de materia bariónica y ν CDM, a partir de las Ecs. (2.2.14) y (2.2.16), se cumple que

$$c_s^2 = 0, \quad (4.2.3)$$

mientras que la contribución viscosa viene dada por la Ec. (3.1.23):

$$c_b^2 = \epsilon c^2, \quad (4.2.4)$$

donde ϵ es el coeficiente de compresibilidad adiabática, con $0 < \epsilon \leq 1$ (Cruz et al., 2019). Esta condición garantiza la causalidad, de modo que la velocidad del sonido disipativa v sea menor o igual que la velocidad de la luz (Maartens, 1996), es decir,

$$v^2 = c_s^2 + c_b^2 \leq c^2. \quad (4.2.5)$$

De manera análoga a la formulación de Eckart presentada en la sección anterior, ρ_{vc} puede obtenerse a partir de la ecuación de conservación definida en la Ec. (4.1.1). Para ello, se expresan las densidades de energía en términos de los parámetros adimensionales, según la Ec. (4.1.4). En conjunto con la expresión de la presión efectiva, Ec. (4.1.2), se deriva la siguiente expresión para la presión viscosa:

$$\Pi_{\text{vc}} = \frac{H_0^2 c^2}{8\pi G} \left[(1+z)\Omega'_{\text{vc}} - 3\Omega_{\text{vc}} \right], \quad (4.2.6)$$

así como su derivada con respecto al corrimiento al rojo,

$$\Pi'_{\text{vc}} = \frac{H_0^2 c^2}{8\pi G} \left[(1+z)\Omega''_{\text{vc}} - 2\Omega'_{\text{vc}} \right]. \quad (4.2.7)$$

Por otro lado, para un universo con curvatura y energía oscura descrita por una constante cosmológica, caracterizado por la segunda ecuación de Friedmann dada (Ec. (3.2.2)), en conjunto con la ecuación de estado barotrópica (Ec. (2.2.13)) y la definición para la presión efectiva (Ec. (4.1.2)), es posible derivar una expresión equivalente para la presión viscosa en términos del parámetro de Hubble:

$$\Pi_{\text{vc,H}} = -\frac{c^2}{8\pi G} \left[-2(1+z)HH' + 3H^2 - H_0^2 \left(3\Omega_{\Lambda} + \Omega_{K,0}(1+z)^2 \right) \right], \quad (4.2.8)$$

y su derivada con respecto al corrimiento al rojo,

$$\Pi'_{\text{vc,H}} = -\frac{c^2}{8\pi G} \left[4HH' - 2(1+z)H'^2 - 2(1+z)HH'' - 2H_0^2 \Omega_{K,0}(1+z) \right]. \quad (4.2.9)$$

Estas dos últimas ecuaciones diferenciales de segundo orden serán fundamentales en las secciones siguientes, ya que permitirán formular las ecuaciones de evolución de $H(z)$ dentro de los formalismos de IST e ISC.

Nótese que Π_{vc} y $\Pi_{\text{vc,H}}$, junto con sus respectivas derivadas, constituyen dos representaciones analíticamente equivalentes de la misma presión viscosa del fluido: la primera se expresa en términos de Ω_{vc} , es decir, $\Pi_{\text{vc}} = \Pi_{\text{vc}}(\Omega_{\text{vc}}, \Omega'_{\text{vc}})$ y $\Pi'_{\text{vc}} = \Pi'_{\text{vc}}(\Omega'_{\text{vc}}, \Omega''_{\text{vc}})$, mientras que la segunda se formula en función de $H(z)$, esto es $\Pi_{\text{vc,H}} = \Pi_{\text{vc,H}}(H, H')$ y $\Pi'_{\text{vc,H}} = \Pi'_{\text{vc,H}}(H, H', H'')$. La elección

de una u otra forma responde exclusivamente a la variable dinámica empleada para describir la evolución del sistema.

Por último, al combinar las Ecs. (4.2.2), (4.1.4), (4.2.4) y (4.1.10), el tiempo de relajación se reescribe en función de Ω_{vc} como:

$$\tau = \frac{\beta H_0^{-1}}{3\epsilon \Omega_{\text{vc}}}, \quad (4.2.10)$$

donde β es un parámetro de viscosidad adimensional definido como:

$$\beta = \tilde{\beta}_0 \left(\frac{\Omega_{\text{vc}}}{\Omega_{\text{vc},0}} \right)^m, \quad \text{con} \quad \tilde{\beta}_0 = \frac{8\pi G}{c^2} \frac{\zeta_0}{H_0}. \quad (4.2.11)$$

4.2.1.1. Modelos Λ vCDM con IST

En particular, cuando $\varepsilon = 0$ en la ecuación de transporte definida en la Ec. (3.1.21), se introduce la versión truncada de la teoría de Israel-Stewart. Las ventajas más destacadas de esta forma truncada son: (i) carece de los términos no lineales presentes en la ecuación de transporte, (ii) establece una velocidad finita para los pulsos viscosos, similar a ISC, lo que garantiza el cumplimiento de la condición de causalidad.

A partir de la Ec. (4.2.1), la ecuación de transporte correspondiente al formalismo de IST, expresada en función del corrimiento al rojo, se escribe como

$$\tau \Pi' - \frac{1}{(1+z)H} (\Pi - 3H\zeta) = 0, \quad (4.2.12)$$

donde ζ y τ están descritos por las Ecs. (4.1.10) y (4.2.10), respectivamente, mientras que Π y Π' pueden expresarse alternativamente mediante las Ecs. (4.2.6) y (4.2.7) o por las Ecs. (4.2.8) y (4.2.9), dependiendo de la variable dinámica considerada.

A partir de esta ecuación, la evolución del parámetro Ω_{vc} con respecto al corrimiento al rojo queda dada por

$$(1+z)^2 \Omega_{\text{vc}}'' - 2(1+z) \Omega_{\text{vc}}' - 3\epsilon \Omega_{\text{vc}} \cdot \left[3 + \tilde{\beta}_0^{-1} \left(\frac{\Omega_{\text{vc}}}{\Omega_{\text{vc},0}} \right)^{-m} E_{\text{vc}}(z)^{-1} \left((1+z) \Omega_{\text{vc}}' - 3\Omega_{\text{vc}} \right) \right] = 0, \quad (4.2.13)$$

donde el parámetro adimensional $\tilde{\beta}_0$ se define en la Ec. (4.2.11), mientras que la función adimensional $E_{\text{vc}}(z)$ está dada por

$$E_{\text{vc}}(z) = \sqrt{\Omega_{\text{b},0}(1+z)^3 + \Omega_{\text{vc}} + \Omega_{\text{K},0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda}}. \quad (4.2.14)$$

De manera análoga, la ecuación de evolución para el parámetro de Hubble dentro del formalismo de IST puede escribirse como

$$(1+z)HH'' - 2HH' + (1+z)(H'^2 + H_0^2 \Omega_{\text{K},0}) - 3\epsilon H_0 \Omega_{\text{vc}} \cdot \left[\tilde{\beta}_0^{-1} \left(\frac{\Omega_{\text{vc}}}{\Omega_{\text{vc},0}} \right)^{-m} \left(H' - \frac{\mathcal{U}(z)}{2(1+z)H} \right) + \frac{3H_0}{2(1+z)} \right] = 0, \quad (4.2.15)$$

donde se ha definido

$$\mathcal{U}(z) = 3H^2 - H_0^2 (3\Omega_{\Lambda} + \Omega_{\text{K},0}(1+z)^2). \quad (4.2.16)$$

4.2.1.2. Modelos Λ vCDM con ISC

Al imponer la condición $\varepsilon = 1$, correspondiente a la versión completa del formalismo de Israel-Stewart, la ecuación de transporte puede formularse en términos del corrimiento al rojo como

$$\tau\Pi' - \frac{\Pi}{(1+z)H} = \frac{3\zeta}{1+z} + \frac{1}{2}\tau\Pi \left(\frac{3}{1+z} - \frac{\tau'}{\tau} + \frac{\zeta'}{\zeta} + \frac{T'}{T} \right), \quad (4.2.17)$$

donde Π y Π' pueden escribirse indistintamente en términos de Ω_{vc} o de $H(z)$, de acuerdo con las Ecs. (4.2.6) y (4.2.7) o, de forma equivalente, las Ecs. (4.2.8) y (4.2.9), según la variable dinámica considerada. Por su parte, las razones τ'/τ , ζ'/ζ , y T'/T se obtienen a partir de las Ecs. (4.2.10), (4.1.10), (3.1.28) y (4.2.3), respectivamente, y adoptan las siguientes formas:

$$\frac{\tau'}{\tau} = (m-1) \frac{\Omega'_{\text{vc}}}{\Omega_{\text{vc}}}, \quad \frac{\zeta'}{\zeta} = m \frac{\Omega'_{\text{vc}}}{\Omega_{\text{vc}}}, \quad \frac{T'}{T} = 0. \quad (4.2.18)$$

Al sustituir estas relaciones, junto con las Ecs. (4.1.10), (4.2.6), y (4.2.7) en la Ec. (4.2.17), se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden para Ω_{vc} , dada por

$$\begin{aligned}
(1+z)^2 \Omega_{\text{vc}}'' - 2(1+z) \Omega_{\text{vc}}' + \frac{\Omega_{\text{vc}}}{2} \left[9 - (1+z)^2 \left(\frac{\Omega_{\text{vc}}'}{\Omega_{\text{vc}}} \right)^2 \right] \\
- 3\epsilon \Omega_{\text{vc}} \left[3 + \tilde{\beta}_0^{-1} \left(\frac{\Omega_{\text{vc}}}{\Omega_{\text{vc},0}} \right)^{-m} E_{\text{vc}}(z)^{-1} \left((1+z) \Omega_{\text{vc}}' - 3\Omega_{\text{vc}} \right) \right] = 0,
\end{aligned} \tag{4.2.19}$$

donde $\tilde{\beta}_0$ y $E_{\text{vc}}(z)$ se definen mediante las Ecs. (4.2.11) y (4.2.14), respectivamente.

De manera análoga, la ecuación de evolución para el parámetro de Hubble dentro del formalismo ISC se obtiene al sustituir las presiones viscosas Π y Π' , respectivamente formuladas en función de $H(z)$ en las Ecs. (4.2.8) y (4.2.9), lo que conduce a una ecuación diferencial de segundo orden en z :

$$\begin{aligned}
4(1+z)HH'' - 2HH' \left(7 + (1+z) \frac{\Omega_{\text{vc}}'}{\Omega_{\text{vc}}} \right) + 4(1+z)(H'^2 + H_0^2 \Omega_{\text{K},0}) \\
+ 12\epsilon H_0 \Omega_{\text{vc}} \left[\tilde{\beta}_0^{-1} \left(\frac{\Omega_{\text{vc}}}{\Omega_{\text{vc},0}} \right)^{-m} \left(H' - \frac{\mathcal{U}(z)}{2(1+z)H} \right) + \frac{3H_0}{2(1+z)} \right] \\
+ \mathcal{U}(z) \left(\frac{3}{1+z} + \frac{\Omega_{\text{vc}}'}{\Omega_{\text{vc}}} \right) = 0,
\end{aligned} \tag{4.2.20}$$

donde la función $\mathcal{U}(z)$ se define en la Ec. (4.2.16).

4.2.2. Resumen de los modelos cosmológicos viscosos considerados

Se analizan modelos cosmológicos con materia oscura fría viscosa de tipo volumen en presencia de una constante cosmológica, descritos por la teoría de Israel-Stewart, considerando tanto su versión truncada (IST) como su versión completa (ISC), y para geometrías espacialmente planas y con curvatura. Estos escenarios corresponden a los modelos Λ vCDM y Λ vCDM + Ω_{K} que constituyen el objeto central de este estudio.

El coeficiente de viscosidad se parametriza según la Ec. (4.1.11), donde el parámetro de viscosidad adimensional $\tilde{\beta}_0$ se considera libre en todos los modelos estudiados. El índice de viscosidad m se fija o se deja libre de acuerdo con el formalismo empleado: $m = 0$, m libre, y $m = 1/2$ en IST, y únicamente m libre y $m = 1/2$ en ISC. Las ecuaciones de continuidad y de evolución del parámetro de Hubble se obtienen siguiendo el procedimiento general descrito en las secciones anteriores.

La elección $m = 1/2$ se justifica en el formalismo de Israel-Stewart, ya que permite soluciones analíticas estables, compatibles con una expansión acelerada tardía y con una producción de entropía físicamente admisible (Cruz et al., 2020), al mismo tiempo permite una evolución estable del universo transitando de una fase desacelerada temprana a una fase acelerada tardía (Cruz et al., 2020).

En la Tabla 4.1.1 se presenta un resumen del conjunto completo de modelos considerados, donde la notación adoptada distingue explícitamente entre los distintos valores del índice de viscosidad mediante la numeración asociada a cada modelo: Λ vCDM1 para $m = 0$, Λ vCDM2 para m libre y Λ vCDM3 para $m = 1/2$, indicando además el formalismo empleado (IST o ISC) y si se considera o no la presencia de curvatura espacial.

Tabla 4.2.1: Resumen de los modelos viscosos Λ vCDM en el formalismo de Israel-Stewart, en su versión truncada y completa. Se clasifican según el índice de viscosidad m , el coeficiente ζ y su forma adimensional β , junto con las correspondientes ecuaciones de continuidad. Para cada modelo se consideran las versiones planas y con curvatura.

Modelos	Ecuación de continuidad
IST	$(1+z)^2 \Omega_{\text{vc}}'' - 2(1+z) \Omega_{\text{vc}}' - 3\epsilon \Omega_{\text{vc}} (3 + \mathcal{F}(z)) = 0$
ISC	$(1+z)^2 \Omega_{\text{vc}}'' - 2(1+z) \Omega_{\text{vc}}' - 3\epsilon \Omega_{\text{vc}} (3 + \mathcal{F}(z)) + \frac{1}{2} \Omega_{\text{vc}} \left[9 - (1+z)^2 \left(\frac{\Omega_{\text{vc}}'}{\Omega_{\text{vc}}} \right)^2 \right] = 0$
$m = 0$	
Λ vCDM1-IST (+ Ω_K)	$\mathcal{F}(z) = \tilde{\beta}_0^{-1} E_{\text{vc}}(z)^{-1} \left[(1+z) \Omega_{\text{vc}}' - 3\Omega_{\text{vc}} \right]$
m libre	
Λ vCDM2-IST (+ Ω_K)	$\mathcal{F}(z) = \frac{\tilde{\beta}_0^{-1}}{E_{\text{vc}}(z)} \left(\frac{\Omega_{\text{vc}}}{\Omega_{\text{vc}}} \right)^{-m} \left[(1+z) \Omega_{\text{vc}}' - 3\Omega_{\text{vc}} \right]$
Λ vCDM2-ISC (+ Ω_K)	
$m = 1/2$	
Λ vCDM3-IST (+ Ω_K)	$\mathcal{F}(z) = \frac{\tilde{\beta}_0^{-1}}{E_{\text{vc}}(z)} \left(\frac{\Omega_{\text{vc}}}{\Omega_{\text{vc}}} \right)^{-1/2} \left[(1+z) \Omega_{\text{vc}}' - 3\Omega_{\text{vc}} \right]$
Λ vCDM3-ISC (+ Ω_K)	
Ecuación de evolución de $H(z)$ en IST	
$(1+z)HH'' - 2HH' + (1+z)(H'^2 + H_0^2 \Omega_{K,0}) - 3\epsilon H_0 \Omega_{\text{vc}} \cdot \left[\beta_0^{-1} \left(H' - \frac{\mathcal{U}(z)}{2(1+z)H} \right) + \frac{3H_0}{2(1+z)} \right] = 0$	
Ecuación de evolución de $H(z)$ en ISC	
$4(1+z)HH'' - 2HH' \left(7 + (1+z) \frac{\Omega_{\text{vc}}'}{\Omega_{\text{vc}}} \right) + 4(1+z)(H'^2 + H_0^2 \Omega_{K,0}) + 12\epsilon H_0 \Omega_{\text{vc}} \left[\beta^{-1} \left(H' - \frac{\mathcal{U}(z)}{2(1+z)H} \right) + \frac{3H_0}{2(1+z)} \right] + \mathcal{U}(z) \left(\frac{3}{1+z} + \frac{\Omega_{\text{vc}}'}{\Omega_{\text{vc}}} \right) = 0$	
$E_{\text{vc}}(z) = \left[\Omega_{\text{b},0}(1+z)^3 + \Omega_{\text{vc}} + \Omega_{\text{K},0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda} \right]^{1/2}$	
$\mathcal{U}(z) = 3H^2 - H_0^2 \left(3\Omega_{\Lambda} + \Omega_{\text{K},0}(1+z)^2 \right)$	
Coeficientes viscosos:	
$\zeta = \zeta_0 \left(\frac{\Omega_{\text{vc}}}{\Omega_{\text{vc},0}} \right)^m, \quad \beta = \tilde{\beta}_0 \left(\frac{\Omega_{\text{vc}}}{\Omega_{\text{vc},0}} \right)^m, \quad \tilde{\beta}_0 = \frac{8\pi G}{c^2} \frac{\zeta_0}{H_0}$	

Capítulo 5

Estadística bayesiana para análisis de datos en cosmología

5.1. Probabilidad

Existen dos enfoques principales para interpretar el concepto de probabilidad: el frecuentista y el bayesiano. En la interpretación frecuentista, la probabilidad de un evento se define como el cociente entre el número de veces que ocurre el evento y el número total de ensayos, en el límite de una serie infinita de repeticiones equiprobables (Trotta, 2008). No obstante, esta definición de probabilidad presenta dificultades tanto conceptuales como prácticas. En particular, al suponer que las repeticiones del experimento son equiprobables, se introduce implícitamente la noción misma de probabilidad que se pretende definir. Asimismo, su validez estricta depende de una secuencia infinita de ensayos bajo condiciones idealmente idénticas, supuesto que rara vez se satisface en aplicaciones reales, donde el número de observaciones es necesariamente finito y, en ocasiones, reducido. Finalmente, este enfoque no permite tratar eventos irrepetibles, como muchos problemas de carácter cosmológico.

En contraste, la interpretación bayesiana entiende la probabilidad como una medida cuantitativa del grado de creencia en una proposición, condicionada a la información disponible. Desde esta perspectiva, la probabilidad no se limita a describir frecuencias de repetición, sino que se representa mediante una distribución sobre el espacio de hipótesis o parámetros, a partir de la cual pueden calcularse intervalos de credibilidad, valores esperados y probabilidades para regiones específicas del espacio de parámetros. En cosmología, donde se busca inferir parámetros físicos a partir de datos observacionales, este enfoque resulta especialmente adecuado.

5.2. Teorema de Bayes

Sea A y B dos hipótesis o eventos. La probabilidad conjunta de que ambos ocurran, denotada por $\mathcal{P}(A, B)$, puede expresarse mediante la regla del producto. Esta regla establece que

$$\mathcal{P}(A, B) = \mathcal{P}(A|B)\mathcal{P}(B), \quad (5.2.1)$$

donde $\mathcal{P}(A|B)$ es la probabilidad condicional de A dado que B ha ocurrido. De manera análoga, al invertir el orden de los eventos,

$$\mathcal{P}(B, A) = \mathcal{P}(B|A)\mathcal{P}(A). \quad (5.2.2)$$

Debido a que la probabilidad conjunta es conmutativa, es decir, $\mathcal{P}(A, B) = \mathcal{P}(B, A)$, se obtiene el teorema de Bayes:

$$\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(B|A)\mathcal{P}(A)}{\mathcal{P}(B)}, \quad \text{con } \mathcal{P}(B) \neq 0. \quad (5.2.3)$$

En el contexto bayesiano, $\mathcal{P}(A)$ y $\mathcal{P}(B)$ se interpretan como grados de creencia. Por lo tanto, el teorema de Bayes actúa como una regla de aprendizaje, actualizando la creencia inicial sobre una hipótesis A cuando se incorpora nueva información B .

5.3. Inferencia bayesiana

La inferencia bayesiana permite actualizar la información sobre un conjunto de parámetros a partir de los datos disponibles. En este enfoque, los parámetros del modelo se consideran cantidades desconocidas cuya incertidumbre se describe mediante distribuciones de probabilidad, mientras que los datos observacionales aportan nueva información que modifica dicha distribución.

Sea un modelo $\mathcal{M}$ con parámetros libres Θ y un conjunto de observaciones D , el teorema de Bayes adopta la forma

$$\mathcal{P}(\Theta | D, \mathcal{M}) = \frac{\mathcal{P}(D | \Theta, \mathcal{M}) \pi(\Theta | \mathcal{M})}{\mathcal{E}(D | \mathcal{M})}, \quad (5.3.1)$$

donde $\mathcal{P}(D | \Theta, \mathcal{M})$ es la verosimilitud (*likelihood* en inglés), $\pi(\Theta | \mathcal{M})$ representa la distribución previa (*prior* en inglés), que incorpora el conocimiento previo sobre los parámetros antes de considerar los datos, $\mathcal{E}(D | \mathcal{M})$ es la evidencia bayesiana, y $\mathcal{P}(\Theta | D, \mathcal{M})$ es la distribución posterior, la cual contiene toda la información estadística necesaria para la estimación de parámetros, la construcción de intervalos de credibilidad y la comparación entre modelos.

5.3.1. Verosimilitud

La verosimilitud se define como la probabilidad de los datos observados, condicionada a un conjunto dado de parámetros del modelo, es decir, $\mathcal{L}(\Theta) \equiv \mathcal{P}(D | \Theta, \mathcal{M})$, donde los datos y el modelo se consideran fijos, mientras que la función se interpreta como función de los parámetros. En este sentido, la verosimilitud cuantifica la compatibilidad entre los datos observados y un conjunto dado de parámetros del modelo.

En aplicaciones cosmológicas, la verosimilitud suele aproximarse mediante una distribución gaussiana. Esta aproximación se justifica por el teorema del límite central, el cual establece que, bajo condiciones generales y para un número suficientemente grande de contribuciones independientes, la distribución de los errores tiende a una distribución normal.

En el caso univariado, la verosimilitud puede escribirse como

$$\mathcal{L}(\Theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{D - \mu(\Theta)}{\sigma} \right)^2 \right], \quad (5.3.2)$$

donde $\mu(\Theta)$ representa la predicción teórica del modelo y σ la desviación estándar asociada al error observacional.

Cuando se dispone de un conjunto de N datos correlacionados, representados por el vector $\vec{D}$, la descripción estadística adecuada está dada por una distribución gaussiana multivariante. En este caso, la verosimilitud puede escribirse como

$$\mathcal{L}(\Theta) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det C}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\vec{D} - \vec{\mu}(\Theta) \right)^T C^{-1} \left(\vec{D} - \vec{\mu}(\Theta) \right) \right], \quad (5.3.3)$$

siendo $\vec{\mu}(\Theta)$ el vector de predicciones teóricas del modelo, el superíndice T indica la transpuesta del vector residual, $(\vec{D} - \vec{\mu})$, y C denota la matriz de covarianza asociada a los datos.

5.3.2. Chi-cuadrado y mejor ajuste

Cuando los datos están correlacionados, como ocurre en diversos conjuntos de datos cosmológicos, resulta necesario utilizar la forma multivariante de la función χ^2 , definida por

$$\chi^2(\Theta) = \left(\vec{D} - \vec{\mu}(\Theta) \right)^T C^{-1} \left(\vec{D} - \vec{\mu}(\Theta) \right). \quad (5.3.4)$$

En cambio, cuando el conjunto de datos no está correlacionado, la función χ^2 se reduce a una suma de contribuciones individuales,

$$\chi^2(\Theta) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{D_i - \mu_i(\Theta)}{\sigma_i} \right)^2. \quad (5.3.5)$$

El mejor ajuste del modelo corresponde al conjunto de parámetros que minimiza el valor de χ^2 , lo que equivale a maximizar la verosimilitud en el caso de errores gaussianos. La variación de la función χ^2 respecto a su valor mínimo se define como

$$\Delta\chi^2 \equiv \chi^2(\Theta) - \chi_{\min}^2. \quad (5.3.6)$$

Para comparar un modelo candidato i con un modelo de referencia, que en esta tesis corresponde al modelo estándar Λ CDM, se define como

$$\Delta\chi_{\min}^2 = \chi_{\min, \Lambda\text{CDM}}^2 - \chi_{\min, i}^2. \quad (5.3.7)$$

De este modo, un valor $\Delta\chi_{\min}^2 > 0$ indica que el modelo candidato proporciona un mejor ajuste a los datos que el modelo estándar.

5.4. Regiones de credibilidad y diagramas de contorno

Una vez obtenido el punto de mejor ajuste, es necesario cuantificar la incertidumbre asociada a los parámetros del modelo. Para ello, se construyen regiones de credibilidad en el espacio de parámetros, definidas como el conjunto de valores que permanecen compatibles con los datos dentro de un nivel de probabilidad dado. En el caso de una verosimilitud gaussiana, estas regiones pueden determinarse a partir de $\Delta\chi^2$, definida en la Ec. (5.3.6).

Las regiones de credibilidad conjuntas están delimitadas por superficies de $\Delta\chi^2$ constante alrededor de su mínimo. Para distribuciones gaussianas multivariadas, estas superficies adoptan una

Tabla 5.4.1: $\Delta\chi^2$ para los niveles de credibilidad convencionales.

σ	Probabilidad (%)	$\Delta\chi^2$		
		1	2	3
1- σ	68.3 %	1.00	2.30	3.53
2- σ	95.4 %	4.00	6.17	8.02
3- σ	99.73 %	9.00	11.8	14.2

forma elipsoidal en el espacio de parámetros. Si la función χ^2 presenta múltiples mínimos locales, pueden aparecer regiones de credibilidad separadas en el espacio de parámetros, conocidas como regiones de credibilidad no conectadas (Padilla et al., 2021).

Los valores críticos de $\Delta\chi^2$ dependen del número de parámetros considerados simultáneamente en la región de credibilidad conjunta. En la Tabla 5.4.1 se muestran los valores correspondientes a los niveles de credibilidad convencionales del 68.3 %, 95.4 % y 99.73 %, equivalentes a 1σ , 2σ y 3σ en el caso gaussiano. Las columnas etiquetadas como 1, 2 y 3 indican, para cada nivel de credibilidad, el valor de $\Delta\chi^2$ asociado a regiones de credibilidad de uno, dos y tres parámetros libres, respectivamente.

5.5. Modelos de selección estadísticos

En esta sección se presentan los principales criterios de selección de modelos utilizados en el análisis estadístico, con especial énfasis en su aplicación en el contexto bayesiano. Estos criterios permiten comparar modelos distintos en función de su capacidad para describir los datos observacionales, considerando simultáneamente la calidad del ajuste, la complejidad del modelo y la incertidumbre asociada a sus parámetros.

5.5.1. Evidencia bayesiana y factor de Bayes

La evidencia bayesiana, o simplemente evidencia, corresponde a la probabilidad marginal de los datos bajo un modelo dado. Este término actúa como un factor de normalización en el teorema de Bayes, garantizando que la probabilidad posterior esté correctamente ajustada a la unidad. Se formula como

$$\mathcal{E}(\mathcal{D} | \mathcal{M}) = \int d\Theta \mathcal{P}(\mathcal{D} | \Theta, \mathcal{M}) \pi(\Theta | \mathcal{M}). \quad (5.5.1)$$

La evidencia permite comparar modelos al combinar de manera consistente la información previa con los datos observados. Aquellos modelos para los cuales exista una coincidencia significativa entre la distribución previa y la verosimilitud tenderán a presentar valores de evidencia más elevados. En este sentido, la evidencia incorpora de manera natural el principio de parsimonia: modelos con espacios de parámetros innecesariamente amplios son penalizados automáticamente en la medida en que incluyen regiones de la distribución previa no respaldadas por los datos, direcciones débilmente restringidas o parámetros redundantes. Como consecuencia, disminuye la verosimilitud promedio sobre el espacio de parámetros y, por ende, la evidencia bayesiana.

Al considerar dos modelos: $\mathcal{M}_0$ y $\mathcal{M}_i$, la razón entre sus evidencias cuantifica el grado de preferencia de uno sobre el otro. En la práctica, resulta conveniente utilizar el logaritmo de esta razón, definido como

$$\ln \left(\frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}_i} \right) \equiv \ln \mathcal{E}_0 - \ln \mathcal{E}_i = \Delta \ln \mathcal{E}. \quad (5.5.2)$$

Sin embargo, el cálculo de la evidencia $\mathcal{E}$ suele ser computacionalmente exigente, ya que implica evaluar una integral sobre el espacio completo de parámetros, el cual generalmente es de alta dimensionalidad.

De manera más práctica, dos modelos suelen compararse mediante el factor de Bayes, denotado $\mathcal{B}_{0i}$, definido como la razón entre sus evidencias, el cual proporciona una medida cuantitativa de cuán preferido es un modelo frente a otro. Explícitamente, se define como

$$\mathcal{B}_{0i} \equiv \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}_i}. \quad (5.5.3)$$

El factor de Bayes se obtiene directamente al aplicar el teorema de Bayes, definido en la Ec. (5.3.1). En efecto, al tomar el cociente entre las probabilidades posteriores de dos modelos, dados los datos $\mathcal{D}$, se obtiene la razón de probabilidades posteriores, también conocida como *odds* posteriores, que puede expresarse como

$$\mathcal{P}_{0i} \equiv \frac{\mathcal{P}(\mathcal{M}_0 | \mathcal{D})}{\mathcal{P}(\mathcal{M}_i | \mathcal{D})} = \frac{\mathcal{E}(\mathcal{D} | \mathcal{M}_0) \pi(\mathcal{M}_0)}{\mathcal{E}(\mathcal{D} | \mathcal{M}_i) \pi(\mathcal{M}_i)} = \mathcal{B}_{0i} \frac{\pi(\mathcal{M}_0)}{\pi(\mathcal{M}_i)}. \quad (5.5.4)$$

De este modo, la preferencia relativa entre modelos depende tanto de la información contenida en los datos como de las creencias previas.

En la práctica, suele emplearse el logaritmo natural del factor de Bayes, ya que facilita su interpretación y comparación numérica. De esta forma,

Tabla 5.5.1: Clasificación de la fuerza de la evidencia según diferentes autores.

Jeffreys (1961)		Kass & Raftery (1995)		Trotta (2008)	
$ \ln \mathcal{B}_{0i} $	Evidencia	$ \ln \mathcal{B}_{0i} $	Evidencia	$ \ln \mathcal{B}_{0i} $	Evidencia
< 1.15	Apenas relevante	$0 - 1$	Insignificante	< 1	No concluyente
$1.15 - 2.3$	Sustancial	$1 - 3$	Positiva	$1.0 - 2.5$	Débil
$2.3 - 4.6$	Fuerte a muy fuerte	$3 - 5$	Fuerte	$2.5 - 5.0$	Moderada a fuerte
> 4.6	Decisivo	> 5	Muy fuerte	> 5	Fuerte

$$\ln \mathcal{B}_{0i} = \ln \mathcal{E}_0 - \ln \mathcal{E}_i. \quad (5.5.5)$$

El signo de $\ln \mathcal{B}_{0i}$ indica cuál modelo es favorecido por los datos: si $\ln \mathcal{B}_{0i} > 1$ sugiere que el modelo $\mathcal{M}_0$ es preferido sobre el modelo $\mathcal{M}_i$; mientras que si $\ln \mathcal{B}_{0i} < -1$ indica que la evidencia favorece al modelo $\mathcal{M}_i$.

Para interpretar cuantitativamente la magnitud del factor de Bayes, se utiliza la escala de Jeffreys (Jeffreys, 1961), la cual clasifica la fuerza de la evidencia estadística en función de intervalos bien definidos según el valor absoluto de $\ln \mathcal{B}_{0i}$. Distintos autores han propuesto variaciones en esta clasificación (Kass & Raftery, 1995; Trotta, 2008), como se muestra en la tabla 5.5.1. En esta tesis, se usará la convención propuesta por (Trotta, 2008), tomando como modelo de referencia el modelo estándar Λ CDM. Por lo tanto,

$$\ln \mathcal{B}_{\Lambda\text{CDM},i} = \ln \mathcal{E}_{\Lambda\text{CDM}} - \ln \mathcal{E}_i. \quad (5.5.6)$$

5.5.2. Criterios de información para comparación de modelos

En astrofísica, así como en otras disciplinas, es habitual emplear criterios de información como alternativa a la evidencia bayesiana cuando se desea comparar modelos de manera computacionalmente eficiente. Estos criterios permiten equilibrar la calidad del ajuste con la complejidad del modelo, introduciendo penalizaciones que favorecen modelos más parsimoniosos (Burnham & Anderson, 2002). Entre los más utilizados se encuentran el Criterio de Información de Akaike (AIC, por su sigla en inglés: *Akaike information criterion*) (Akaike, 1974), el Criterio de Información Bayesiano (BIC, por su sigla en inglés: *Bayesian information criterion*) (Schwarz, 1978) y el Criterio de Información de Deviance (DIC, por su sigla en inglés: *Deviance Information Criterion*) (Spiegelhalter et al., 2002).

5.5.2.1. AIC

El AIC se fundamenta en la teoría de la información y se define como:

$$\text{AIC} \equiv -2 \ln \mathcal{L}_{\max} + 2k = \chi_{\min}^2 + 2k, \quad (5.5.7)$$

donde k es el número de parámetros libres en el modelo. El término $2k$ introduce una penalización proporcional al número de parámetros libres, con el objetivo de evitar el sobreajuste. Al comparar varios modelos, el modelo preferido bajo este criterio es aquel que minimiza el valor del AIC.

Cuando el tamaño de la muestra N es pequeño en comparación con k , se utiliza una versión corregida (Hurvich & Tsai, 1989)

$$\text{AIC}_c = \text{AIC} + \frac{2k(2k+1)}{N-k-1}, \quad (5.5.8)$$

la cual reduce el sesgo asociado a muestras finitas.

5.5.2.2. BIC

El BIC se obtiene como una aproximación al factor de Bayes, bajo ciertos supuestos, entre ellos que los puntos de datos son independientes e idénticamente distribuidos. Se define como

$$\text{BIC} \equiv -2 \ln \mathcal{L}_{\max} + k \ln N = \chi_{\min}^2 + k \ln N. \quad (5.5.9)$$

En comparación con el AIC, este criterio introduce una penalización más fuerte a la complejidad del modelo, que depende del número de parámetros libres y del tamaño de la muestra N , favoreciendo modelos más simples cuando N es grande. Al comparar varios modelos, el modelo preferido es aquel que presenta el menor valor de BIC.

5.5.2.3. DIC

El DIC combina elementos de la estadística bayesiana y de la teoría de la información. A diferencia del AIC y del BIC, cuya penalización por complejidad depende explícitamente del número total de parámetros del modelo, el DIC introduce una medida de complejidad basada en la distribución posterior. En particular, la penalización se determina a través de la denominada complejidad bayesiana, que cuantifica el número efectivo de parámetros realmente restringidos por los datos. Se formula como,

$$\text{DIC} \equiv \overline{D(\Theta)} + 2C_B = D(\overline{\Theta}) + C_B, \quad (5.5.10)$$

donde

$$C_B = \overline{D(\Theta)} - D(\overline{\Theta}) \quad (5.5.11)$$

corresponde a la complejidad bayesiana, la cual cuantifica el número efectivo de parámetros. Las barras superiores indican valores medios respecto de la distribución posterior, y $D(\Theta)$ corresponde a la devianza bayesiana (*Bayesian deviance* en inglés), definida como $D(\Theta) \equiv -2 \ln \mathcal{L}(\Theta)$. En el caso de verosimilitudes gaussianas, la devianza coincide con la función $\chi^2(\Theta)$. Al comparar varios modelos, el modelo preferido es aquel que presenta el menor valor de DIC.

5.5.2.4. Comparación relativa de los criterios de información

La fuerza relativa de la evidencia para cada modelo, respecto al valor mínimo, puede ser determinada por

$$\Delta\text{IC} = \text{IC}_i - \text{IC}_{\min}, \quad (5.5.12)$$

donde IC representa indistintamente AIC, BIC o DIC, mientras que $\text{IC}_{\min}$ corresponde al menor valor obtenido entre los modelos analizados. En este caso, $\Delta\text{IC} > 0$ cuantifica cuán desfavorecido se encuentra el modelo i respecto al mejor modelo del conjunto.

Para realizar una comparación directa entre un modelo candidato y un modelo de referencia, puede definirse de manera general la diferencia en cualquier criterio de información (IC) como

$$\Delta\text{IC} = \text{IC}_{\text{ref}} - \text{IC}_i, \quad (5.5.13)$$

donde IC_{ref} corresponde al valor del criterio evaluado para el modelo de referencia. En esta tesis, el modelo de referencia adoptado es el escenario estándar ΛCDM .

Con esta convención, un valor $\Delta\text{IC} > 0$ indica preferencia por el modelo candidato i frente al modelo estándar ΛCDM , mientras que $\Delta\text{IC} < 0$ señala que los datos favorecen al modelo estándar. Siguiendo la clasificación presentada en [Forconi & Di Valentino \(2025\)](#), la diferencia ΔIC puede interpretarse en términos del nivel de evidencia a favor del modelo candidato frente al modelo de referencia:

- Si $0 \leq \Delta\text{IC} < 2$, existe evidencia débil a favor del modelo candidato.

- Si $2 \leq \Delta\text{IC} < 6$, se considera evidencia positiva.
- Si $6 \leq \Delta\text{IC} < 10$, se clasifica como evidencia fuerte.
- Si $\Delta\text{IC} > 10$, hay evidencia muy fuerte que respalda el modelo candidato frente al modelo de referencia ΛCDM .

5.6. Métodos de Monte Carlo con cadenas de Markov

En inferencia bayesiana, la distribución posterior rara vez se puede evaluar de forma analítica debido a la presencia de integrales de alta dimensionalidad asociadas a su normalización. Para abordar esta dificultad, se emplean los métodos de Monte Carlo con cadenas de Markov (MCMC), los cuales construyen una cadena cuya distribución estacionaria coincide con la posterior de interés. Entre los algoritmos más utilizados se encuentra el esquema de Metropolis–Hastings (Metropolis et al., 1953; Hastings, 1970).

En cosmología, estos métodos se emplean ampliamente para estimar parámetros a partir de datos observacionales, ya que permiten caracterizar la distribución posterior y obtener intervalos de credibilidad que cuantifican la incertidumbre asociada a los parámetros del modelo.

5.6.1. Método MCMC invariante afín

En esta tesis se utiliza el muestreador MCMC invariante afín (Goodman & Weare, 2010), especialmente adecuado para distribuciones posteriores altamente correlacionadas. Este método es invariante bajo transformaciones afines en el espacio de parámetros, lo que implica que su eficiencia no depende de la escala ni de la orientación de las variables.

A diferencia de los métodos MCMC basados en una única cadena, el método invariante afín emplea un conjunto de caminantes que exploran el espacio de parámetros de forma colectiva. Cada caminante propone nuevos estados utilizando la información de los demás, lo que permite adaptarse automáticamente a la estructura de correlaciones de la distribución posterior, mejorando así la eficiencia del muestreo.

En la práctica, se utiliza el paquete de Python `emcee`¹ (Foreman-Mackey et al., 2013) que implementa el muestreador MCMC invariante afín y es ampliamente utilizado en análisis cosmológicos para la estimación de parámetros. Este genera un conjunto de muestras en el espacio de parámetros que sigue la distribución posterior, permitiendo caracterizar tanto las regiones de mayor

¹<https://emcee.readthedocs.io/en/stable/>

probabilidad como la dispersión asociada a cada parámetro. A partir de estas muestras, los parámetros se estiman mediante estadísticos de la distribución posterior, tales como la media, la mediana o el máximo a posteriori (MAP). En esta tesis se adopta como estimador puntual el valor MAP, ya que identifica directamente la región de mayor probabilidad de la distribución posterior y no depende de supuestos de simetría, lo que resulta particularmente adecuado en presencia de distribuciones asimétricas o degeneradas.

Con `emcee`, la convergencia de las cadenas se evalúa mediante el tiempo de autocorrelación integrado, ya que este cuantifica el número de pasos necesarios para obtener muestras efectivamente independientes de la distribución posterior. En particular, se descarta una fase inicial de la cadena, denominada *burn-in* en inglés, correspondiente a un múltiplo del tiempo de autocorrelación, con el objetivo de eliminar la dependencia de las condiciones iniciales. Posteriormente, las muestras utilizadas en el análisis se seleccionan teniendo en cuenta la escala de autocorrelación, de modo que representen realizaciones efectivamente independientes de la distribución posterior.

5.6.2. Análisis y visualización de las cadenas

A partir de las muestras obtenidas, se construyen las distribuciones posteriores marginalizadas de cada parámetro. Estas se obtienen al marginalizar la distribución posterior conjunta sobre las demás variables, lo que permite estimar los valores más probables de los parámetros y cuantificar sus incertidumbres. Además, al considerar pares de parámetros, se obtienen distribuciones posteriores conjuntas bidimensionales, permitiendo identificar correlaciones y degeneraciones entre los parámetros.

Para el análisis y la visualización de las distribuciones posteriores se emplea el paquete de Python `ChainConsumer`² (Hinton, 2016). Esta herramienta permite obtener distribuciones marginales unidimensionales y bidimensionales, estimar valores puntuales de los parámetros cosmológicos y representar regiones de credibilidad conjuntas mediante diagramas de contorno, como se ilustra en la Fig. 5.6.1. En el contexto cosmológico, estas representaciones resultan especialmente útiles para identificar degeneraciones entre parámetros y comparar de forma consistente distintos modelos o combinaciones de datos.

²<https://samreay.github.io/ChainConsumer/>

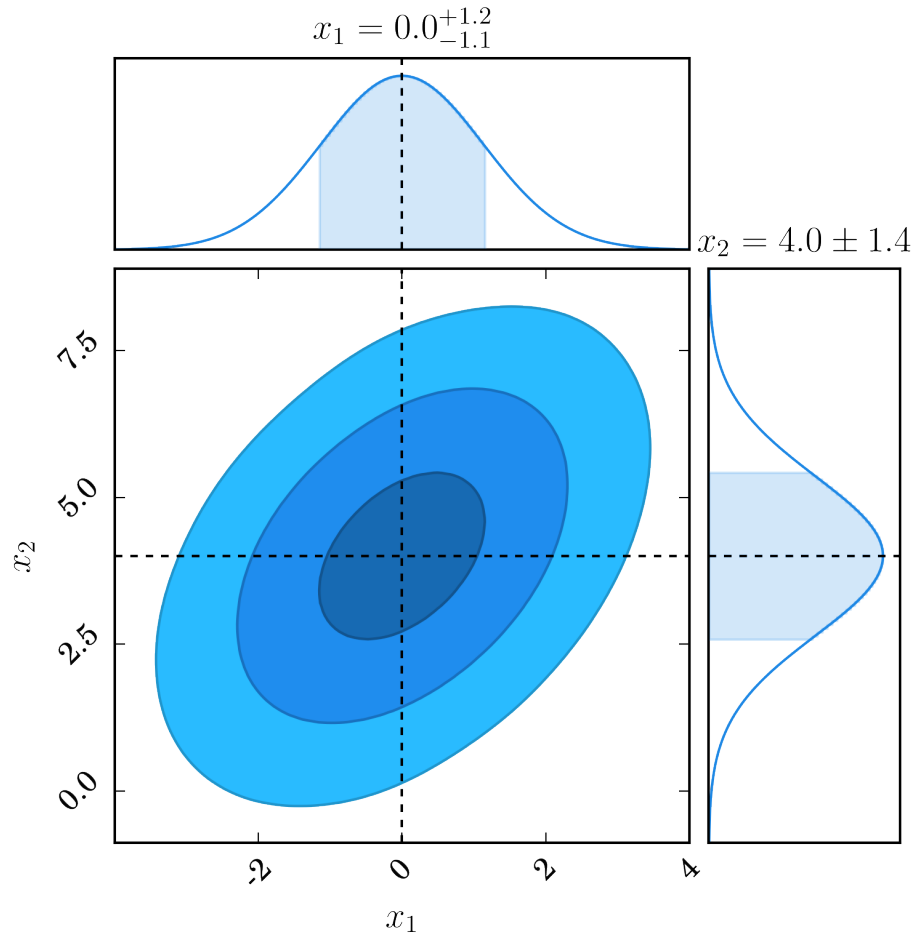


Figura 5.6.1: Distribuciones posteriores conjuntas en 2D y marginalizadas en 1D para dos parámetros, generadas mediante MCMC y visualizadas con `ChainConsumer`. Los paneles no diagonales muestran las distribuciones posteriores conjuntas, con contornos correspondientes a niveles de credibilidad del 68.3 %, 95.4 % y 99.73 %, mientras que los paneles diagonales corresponden a las distribuciones posteriores marginalizadas. La inclinación de los contornos indica la presencia de correlación positiva entre los parámetros. Las líneas punteadas señalan los valores MAP de los parámetros. Figura obtenida de [Hinton \(2016\)](#).

Capítulo 6

Observables Cosmológicos

Este estudio considera medidas observacionales provenientes de una época tardía, es decir, aquellas que describen directamente la dinámica de la expansión a bajos corrimientos al rojo. En particular, se emplean cuatro observables complementarios: (i) SNe Ia, que permiten reconstruir la expansión integrada mediante la distancia de luminosidad; (ii) cronómetros cosmológicos (CC), que proporcionan mediciones directas de $H(z)$; (iii) la constante de Hubble local H_0 ; y (iv) las BAO, que ofrecen medidas geométricas robustas y, en algunos casos, determinaciones directas de $H(z)$.

En las secciones siguientes se describen estos observables, comenzando con las SNe Ia, que constituyen uno de los pilares de la cosmología observacional moderna y son fundamentales en la determinación local del parámetro de Hubble H_0 .

6.1. Supernovas Tipo Ia

Las supernovas son uno de los eventos más energéticos del universo y representan el final de la evolución de ciertas estrellas. Estas explosiones estelares se clasifican principalmente en dos categorías, según sus características espectrales: Tipo I y Tipo II ([Minkowski, 1941](#); [Parrent et al., 2014](#)). El criterio distintivo entre ambas radica en la presencia de líneas de absorción de hidrógeno; las supernovas de Tipo II (SNe II) las presentan, mientras que las de Tipo I carecen de ellas.

Las SNe II son el resultado del colapso gravitacional del núcleo de estrellas masivas tras el agotamiento de su combustible nuclear. En contraste, las SNe Ia, una subclase de las Tipo I, están asociadas a sistemas binarios en los que una de las componentes es una enana blanca. Estas explosiones ocurren cuando la enana blanca acreta suficiente materia desde su estrella compañera y

alcanza el límite de Chandrasekhar, aproximadamente $1.4 M_{\odot}$, lo que conduce a una inestabilidad termonuclear que desencadena la explosión (Whelan & Iben, 1973; Liu et al., 2023).

Las SNe Ia presentan curvas de luz bien caracterizadas y una luminosidad máxima casi uniforme. Estas propiedades permiten estandarizar su brillo mediante correcciones basadas en la forma de la curva de luz y en características espectrales, lo que posibilita una estimación precisa de su luminosidad intrínseca. En consecuencia, estas supernovas pueden emplearse como candelas estándar para la determinación de distancias cosmológicas.

Esta capacidad para medir distancias cosmológicas con gran precisión ha convertido a las SNe Ia en herramientas fundamentales de la cosmología observacional, en particular para la determinación de la tasa de expansión del universo. De hecho, el análisis de muestras de SNe Ia proporcionó la primera evidencia observacional sólida de la expansión cósmica acelerada (Riess et al., 1998; Perlmutter et al., 1999).

6.1.1. Datos utilizados: Pantheon+ y Pantheon+ & SH0ES

Para el análisis se emplean las compilaciones Pantheon+ (PP) (Scolnic et al., 2022) y Pantheon+ & SH0ES (PPS) (Brout et al., 2022). La muestra PP consta de 1701 curvas de luz, correspondientes a 1550 mediciones independientes de SNe Ia, en el rango de corrimiento al rojo $0.001 < z < 2.26$. Este conjunto proporciona magnitudes aparentes, a partir de las cuales se construye la función χ^2 como

$$\chi_{\text{PP}}^2 = \Delta \vec{D}^T \cdot C^{-1} \cdot \Delta \vec{D}, \quad (6.1.1)$$

donde la matriz de covarianza total $C = C_{\text{stat}} + C_{\text{syst}}$ combina la matriz de covarianza diagonal de las incertidumbres estadísticas, C_{stat} , con la matriz de covarianza de las incertidumbres sistemáticas, C_{syst} , correspondiente a cada curva de luz. Además, $\vec{D}$ es el vector residual de dimensión 1701, cuyas componentes se expresan como

$$\Delta D_i = \mu_i - \mu_{\text{modelo}}(z_i, \Theta), \quad (6.1.2)$$

las cuales cuantifican la diferencia entre los módulos de distancia observados y los predichos por el modelo. El módulo de distancia del modelo, al corrimiento al rojo z_i , se define como

$$\mu_{\text{modelo}}(z_i, \Theta) = 5 \log_{10} \left[\frac{d_L(z_i, \Theta)}{1 \text{Mpc}} \right] + 25, \quad (6.1.3)$$

donde $d_L \equiv (c/H_0) D_L$ es la distancia de luminosidad expresada en Mpc.

La muestra PPS combina el conjunto PP con las distancias a galaxias anfitrionas determinadas mediante Cefeidas por la colaboración SH0ES (Riess et al., 2022). Este análisis conjunto permite restringir la degeneración entre la magnitud absoluta M de las SNe Ia y el parámetro de Hubble H_0 .

La inclusión de las distancias calibradas con Cefeidas modifica los residuos como

$$\Delta D'_i = \begin{cases} \mu_i - \mu_i^{\text{Cefeidas}}, & i \in \text{galaxias anfitrionas con Cefeidas}, \\ \mu_i - \mu_{\text{modelo}}(z_i, \Theta), & \text{en otro caso}, \end{cases} \quad (6.1.4)$$

donde μ_i^{Cefeidas} denota el módulo de distancia calibrado mediante Cefeidas. La función χ^2 asociada a la muestra PPS queda entonces definida como

$$\chi_{\text{PPS}}^2 = \Delta \vec{D}'^T \cdot (C^{\text{SN Ia}} + C^{\text{Cefeidas}})^{-1} \cdot \Delta \vec{D}', \quad (6.1.5)$$

siendo $C^{\text{Cepheid}} = C_{\text{stat}}^{\text{Cepheid}} + C_{\text{syst}}^{\text{Cepheid}}$ la matriz de covarianza de las galaxias anfitrionas de Cefeidas de SH0ES.

Las muestras de SNe Ia incluyen corrimiento al rojo tanto heliocéntricos (z_{hel}) como corregidos al sistema del CMB (z_{CMB}). En consecuencia, considerando la Ec. (2.3.18), la distancia de luminosidad se calcula como

$$d_L(z, \Theta) = (1 + z_{\text{CMB}})(1 + z_{\text{hel}}) d_A(z, \Theta). \quad (6.1.6)$$

Al considerar una posible contribución de la curvatura espacial, el cálculo numérico de $d_A(z, \Theta)$ para cada z_i y conjunto de parámetros Θ , se realiza resolviendo la ecuación diferencial

$$d'_A(z, \Theta) = -\frac{d_A(z, \Theta)}{1+z} + \frac{c}{(1+z)H(z, \Theta)} \left[1 + \Omega_{K,0}(1+z)^2 \left(\frac{H_0 d_A(z, \Theta)}{c} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (6.1.7)$$

la cual sigue una formulación análoga a la presentada en Fritis et al. (2024) para el cálculo de la distancia de luminosidad.

6.2. Cronómetros cosmológicos

La forma más directa de restringir los parámetros cosmológicos es mediante el uso de mediciones de $H(z)$. Para este propósito, se compiló una muestra de 33 puntos de datos provenientes de diversas fuentes, tal como se presenta en la Tabla 6.2.1, junto con sus respectivas referencias, medidos en el rango de corrimientos al rojo $0.07 \leq z \leq 1.965$. El error total asociado está dado por $\sigma_{\text{tot}} = [\sigma_{\text{stat}}^2 + \sigma_{\text{syst}}^2]^{1/2}$.

Estos datos de $H(z)$ se obtuvieron utilizando el método de CC, el cual se basa en la comparación de la evolución diferencial de la edad de las galaxias en distintos corrimientos al rojo, tal como fue propuesto por [Jimenez & Loeb \(2002\)](#). Este método permite estimar la tasa de expansión del universo a partir de la relación dada en la Ec. (2.3.3), esto es,

$$H(z) = -\frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt}.$$

Este enfoque es independiente de supuestos cosmológicos, convirtiéndolo en una herramienta valiosa para poner a prueba distintos modelos mediante la medición directa de la tasa de expansión del universo.

6.2.1. Datos utilizados

Mediante la construcción de la función χ^2 se restringen de manera efectiva los parámetros libres de los modelos con viscosidad de volumen. En la implementación del MCMC, la función χ^2 correspondiente al método de CC viene dada por

$$\chi_{\text{CC}}^2(\Theta) = \sum_{i=1}^{33} \left(\frac{H^{\text{teo}}(z_i, \Theta) - H_{\text{CC}}^{\text{obs}}(z_i)}{\sigma_{i,\text{CC}}} \right)^2, \quad (6.2.1)$$

donde $H^{\text{teo}}(z_i, \Theta)$ representa el valor teórico del parámetro de Hubble en el corrimiento al rojo z_i , para el conjunto de parámetros libres del modelo Θ , $H_{\text{CC}}^{\text{obs}}(z_i)$ denota el valor observado correspondiente de $H(z)$, obtenido mediante el método de CC en z_i , y $\sigma_{i,\text{CC}}$ representa la incertidumbre observacional asociada a $H_{\text{CC}}^{\text{obs}}(z_i)$.

6.3. Distribución previa sobre H_0

En el análisis se incorpora una distribución previa gaussiana sobre la constante de Hubble, $H_0 = 73.04 \pm 1.04 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, reportada por la colaboración SH0ES mediante el método de

Tabla 6.2.1: 33 mediciones de $H(z)$ en unidades de $\text{km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$, obtenidas mediante el método de CC, basado en la edad diferencial de galaxias, junto con sus incertidumbres y referencias asociadas.

z	$H(z) \pm \sigma_H$	Referencias	z	$H(z) \pm \sigma_H$	Referencias.
0.07	69.0 ± 19.6	Zhang et al. (2014)	0.48	97 ± 62	Stern et al. (2010)
0.09	71 ± 12	Jimenez et al. (2003)	0.5929	104 ± 13	Moresco et al. (2012)
0.12	68.6 ± 26.2	Zhang et al. (2014)	0.6797	92 ± 8	(Moresco et al., 2012)
0.17	83 ± 8	Simon et al. (2005)	0.75	98.8 ± 33.6	Borghi et al. (2022)
0.1791	75 ± 4	Moresco et al. (2012)	0.7812	105 ± 12	Moresco et al. (2012)
0.1993	75 ± 5	Moresco et al. (2012)	0.80	113.1 ± 25.8	Jiao et al. (2023)
0.20	72.9 ± 29.6	Zhang et al. (2014)	0.8754	125 ± 17	Moresco et al. (2012)
0.27	77 ± 14	Simon et al. (2005)	0.88	90 ± 40	Simon et al. (2005)
0.28	88.8 ± 36.6	Zhang et al. (2014)	0.9	117 ± 23	Stern et al. (2010)
0.3519	83 ± 14	Moresco et al. (2012)	1.037	154 ± 20	Moresco et al. (2012)
0.3802	83.0 ± 13.5	Moresco et al. (2016)	1.3	168 ± 17	Simon et al. (2005)
0.4	95 ± 17	Simon et al. (2005)	1.363	160.0 ± 33.6	Moresco (2015)
0.4004	77.0 ± 10.2	Moresco et al. (2016)	1.43	177 ± 18	Simon et al. (2005)
0.4247	87.1 ± 11.2	Moresco et al. (2016)	1.53	140 ± 14	Simon et al. (2005)
0.4497	92.8 ± 12.9	Moresco et al. (2016)	1.75	202 ± 40	Simon et al. (2005)
0.47	89 ± 50	Ratsimbazafy et al. (2017)	1.965	186.5 ± 50.4	Moresco (2015)
0.4783	80.9 ± 9.0	Moresco et al. (2016)			

escalera de distancias a través de SNe Ia calibradas con Cefeidas (Riess et al., 2022). En lo sucesivo, tanto el valor observado de H_0 como su implementación como distribución previa gaussiana se denotarán de forma abreviada como R22.

6.4. Oscilaciones acústicas bariónicas

Las BAO constituyen una regla estándar robusta originada por las ondas acústicas del fluido fotón–barión en el universo temprano. Su escala característica está determinada por el horizonte de sonido en la época de arrastre bariónico, $r_d \equiv r_s(z_d)$ (Eisenstein & Hu, 1998). Esta cantidad se encuentra fuertemente restringida por las mediciones del CMB. En el escenario del modelo ΛCDM , esta época ocurre en $z_d \approx 1060$ (Planck Collaboration et al., 2020).

El horizonte de sonido en la época de arrastre se define como

$$r_d = \frac{1}{H_0} \int_{z_d}^{\infty} \frac{c_s(z)}{E(z)} dz, \quad (6.4.1)$$

donde $E(z)$ corresponde al parámetro de Hubble normalizado introducido en la Ec. (2.3.4), y $c_s(z)$ es la velocidad del sonido en el fluido fotón–barión (véase Ecs. (2.2.14) y (2.2.17)), dada por

$$c_s = c \left[3 \left(1 + \frac{3 \Omega_{b,0}}{4 \Omega_{\gamma,0}(1+z)} \right) \right]^{-1/2}. \quad (6.4.2)$$

El valor actual del parámetro de densidad de fotones es $\Omega_{\gamma,0} \approx 2.469 \times 10^{-5} h^{-2}$ (Komatsu et al., 2011), donde h es el parámetro de Hubble adimensional definido como

$$h = \frac{H_0}{100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}}. \quad (6.4.3)$$

Observacionalmente, las mediciones de las BAO pueden descomponerse en las direcciones transversal y radial con respecto a la línea de visión. Esto conduce a dos observables fundamentales, ambos normalizados por la escala r_d :

- la distancia comóvil transversal $d_M(z)/r_d$,
- la distancia de Hubble radial $d_H(z)/r_d$, donde

$$d_H(z) \equiv \frac{c}{H(z)}. \quad (6.4.4)$$

Estas dos mediciones se combinan en la distancia promedio en volumen,

$$d_V(z) = [z d_M^2(z) d_H(z)]^{1/3}. \quad (6.4.5)$$

6.4.1. Datos utilizados

Para el análisis se emplean las mediciones de las BAO de DESI DR2 (*Dark Energy Spectroscopic Instrument, Data Release 2*), que cubren el rango de corrimientos al rojo $0.1 < z < 4.2$ utilizando múltiples trazadores, según se detalla en la Tabla III de Abdul Karim et al. (2025). El conjunto de datos incluye la muestra de galaxias brillantes (*Bright Galaxy Sample*, BGS; $0.1 < z < 0.4$), las galaxias rojas luminosas (*Luminous Red Galaxies*, LRGs; $0.4 < z < 1.1$), las galaxias de líneas de emisión (*Emission-Line Galaxies*, ELGs; $1.1 < z < 1.6$), los cuásares (*Quasars*, QSO; $0.8 < z < 2.1$) y el bosque Lyman- α (*Lyman- α forest*, Ly α ; $1.77 < z < 4.16$). En adelante, este conjunto completo de datos se denomina simplemente “DESI”.

Tabla 6.4.1: Mediciones de las BAO provenientes de DESI DR2 utilizadas en este análisis, adaptadas de la Tabla IV de [Abdul Karim et al. \(2025\)](#). En la publicación original de DESI DR2 estas cantidades se denotan como D_M , D_H y D_V ; aquí se ha adoptado la notación d_X para mantener la coherencia con el resto del trabajo.

Trazadores	z_{eff}	$d_V(z)/r_d$	d_M/r_d	d_H/r_d
BGS	0.295	7.942 ± 0.075	—	—
LRG1	0.510	—	13.588 ± 0.167	21.863 ± 0.425
LRG2	0.706	—	17.351 ± 0.180	19.455 ± 0.330
LRG3+ELG1	0.934	—	21.576 ± 0.152	17.641 ± 0.193
ELG2	1.321	—	27.601 ± 0.318	14.176 ± 0.221
QSO	1.484	—	30.512 ± 0.760	12.817 ± 0.516
Ly α	2.330	—	38.988 ± 0.531	8.632 ± 0.101

La muestra utilizada consta de 13 puntos de datos, los cuales se presentan en la Tabla 6.4.1. La función χ^2 asociada a los datos de DESI se construye como

$$\chi_{\text{DESI}}^2 = \Delta \vec{Q}^T C_{\text{DESI}}^{-1} \Delta \vec{Q}, \quad (6.4.6)$$

donde C_{DESI} es la matriz de covarianza correspondiente y $\Delta \vec{Q}$ es el vector residual asociado. La componente i -ésima del residual se define como

$$\Delta Q_i = \begin{cases} \left(\frac{d_V(z_i, \Theta)}{r_d} \right)^{\text{teo}} - \left(\frac{d_V(z_i)}{r_d} \right)^{\text{obs}}, & \text{para } d_V, \\ \left(\frac{d_M(z_i, \Theta)}{r_d} \right)^{\text{teo}} - \left(\frac{d_M(z_i)}{r_d} \right)^{\text{obs}}, & \text{para } d_M, \\ \left(\frac{d_H(z_i, \Theta)}{r_d} \right)^{\text{teo}} - \left(\frac{d_H(z_i)}{r_d} \right)^{\text{obs}}, & \text{para } d_H. \end{cases} \quad (6.4.7)$$

En particular, el cálculo numérico de $d_V(z_i, \Theta)$ para cada corrimiento al rojo z_i y conjunto de parámetros Θ se realiza a partir de la distancia de diámetro angular $d_A(z_i, \Theta)$, obtenida mediante la resolución de la ecuación diferencial dada en la Ec. (6.1.7), como

$$d_V(z_i, \Theta) = \left[(1 + z_i)^2 d_A^2(z_i, \Theta) \frac{c z_i}{H(z_i, \Theta)} \right]^{1/3}. \quad (6.4.8)$$

Es común encontrar estas distancias escritas como D_M , D_H y D_V ; sin embargo, en este trabajo

Tabla 6.4.2: 30 mediciones de $H(z)$ en unidades de $\text{km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ usando datos de las BAO, junto con sus incertidumbres y referencias asociadas.

z	$H(z) \pm \sigma_H$	Referencias	z	$H(z) \pm \sigma_H$	Referencias
0.24	79.69 ± 2.65	Gaztañaga et al. (2009)	0.57	92.9 ± 7.8	Anderson et al. (2014a)
0.3	81.7 ± 6.22	Oka et al. (2014)	0.57	96.8 ± 3.4	Anderson et al. (2014b)
0.31	78.18 ± 4.74	Wang et al. (2017)	0.59	98.48 ± 3.18	Wang et al. (2017)
0.34	83.80 ± 3.36	Gaztañaga et al. (2009)	0.6	87.9 ± 6.1	Blake et al. (2012)
0.35	82.7 ± 8.4	Chuang & Wang (2013)	0.61	97.3 ± 2.1	Alam et al. (2017)
0.36	79.94 ± 3.38	Wang et al. (2017)	0.64	98.82 ± 2.98	Wang et al. (2017)
0.38	81.5 ± 1.9	Alam et al. (2017)	0.73	97.3 ± 7.0	Blake et al. (2012)
0.40	82.04 ± 2.03	Wang et al. (2017)	0.8	104.0 ± 4.4	Wang et al. (2018)
0.43	86.45 ± 3.68	Gaztañaga et al. (2009)	1.0	118.0 ± 5.6	Wang et al. (2018)
0.44	82.6 ± 7.8	Blake et al. (2012)	1.5	159 ± 15	Wang et al. (2018)
0.44	84.81 ± 1.83	Wang et al. (2017)	2.0	207 ± 29	Wang et al. (2018)
0.48	87.79 ± 2.03	Wang et al. (2017)	2.2	227 ± 35	Wang et al. (2018)
0.51	90.4 ± 1.9	Alam et al. (2017)	2.33	224 ± 8	Bautista et al. (2017)
0.52	94.36 ± 2.64	Wang et al. (2017)	2.34	222 ± 7	Delubac et al. (2015)
0.56	93.34 ± 2.30	Wang et al. (2017)	2.36	226 ± 8	Font-Ribera et al. (2014)

se adopta la notación d_X para mantener la consistencia en la notación definida previamente.

De manera complementaria, se consideran restricciones directas sobre la historia de expansión mediante mediciones del parámetro de Hubble derivadas de las BAO. Estas se obtienen al combinar la escala de las BAO medida en la dirección radial con un valor apropiado del horizonte de sonido r_d . Para ello, se utiliza una compilación independiente de 30 mediciones no correlacionadas de $H(z)$ basadas en las BAO, provenientes de distintos relevamientos de galaxias, las cuales se presentan en la Tabla 6.4.2 y cubren el rango de corrimientos al rojo $0.24 \leq z \leq 2.36$.

La función χ^2 asociada a este conjunto de datos BAO- $H(z)$ viene dada por

$$\chi_{\text{HBAO}}^2 = \sum_{i=1}^{30} \left(\frac{H^{\text{teo}}(z_i, \Theta) - H_{\text{HBAO}}^{\text{obs}}(z_i)}{\sigma_{i,\text{HBAO}}} \right)^2, \quad (6.4.9)$$

donde $H^{\text{teo}}(z_i, \Theta)$ representa el valor teórico del parámetro de Hubble en el corrimiento al rojo z_i para el conjunto de parámetros libres del modelo Θ , mientras que $H_{\text{HBAO}}^{\text{obs}}(z_i)$ denota los valores observados obtenidos a partir de las mediciones de las BAO y $\sigma_{i,\text{HBAO}}$ corresponde a las

incertidumbres asociadas.

Por lo tanto, la contribución de las BAO se construye a partir de dos conjuntos independientes: (i) las mediciones anisotrópicas completas de distancias provenientes de DESI, representadas por χ_{DESI}^2 , y (ii) la compilación de valores del parámetro de Hubble basada en las BAO, representada por χ_{HBAO}^2 . Cuando ambos conjuntos se consideran simultáneamente, la contribución total se define como

$$\chi_{\text{BAO}}^2 = \chi_{\text{DESI}}^2 + \chi_{\text{HBAO}}^2. \quad (6.4.10)$$

6.5. Análisis conjunto

Para imponer restricciones observacionales conjuntas a partir de los datos de CC, BAO y SNe Ia, la función χ^2 total se escribe como

$$\chi_{\text{data}}^2 = \chi_{\text{BAO}}^2 + \chi_{\text{SNIa}}^2 + \chi_{\text{CC}}^2, \quad (6.5.1)$$

donde χ_{SNIa}^2 representa indistintamente a χ_{PP}^2 o χ_{PPS}^2 , dependiendo de la muestra de supernovas empleada. Por su parte, χ_{BAO}^2 denota ya sea χ_{HBAO}^2 o la combinación $\chi_{\text{HBAO}}^2 + \chi_{\text{DESI}}^2$, según el conjunto de datos considerado. En este análisis se asume que las mediciones provenientes de los distintos conjuntos de datos no están correlacionadas. Adicionalmente, la distribución posterior se obtiene al combinar la verosimilitud asociada a los datos con R22.

Capítulo 7

Resultados y análisis de modelos Λ vCDM en la teoría de Eckart

En este capítulo se presentan y analizan los valores inferidos de los parámetros cosmológicos de modelos viscosos de tipo volumen con constante cosmológica, en el formalismo de Eckart, a partir de datos observacionales. En una primera etapa, se estudian cuatro modelos que emplean el *ansatz* introducido en la Ec. (4.1.10): dos correspondientes a un universo espacialmente plano, Λ vCDM1 y Λ vCDM2, y dos que incorporan curvatura espacial, Λ vCDM1 + Ω_K y Λ vCDM2 + Ω_K . Posteriormente, se analizan y comparan los resultados obtenidos para cada uno de los modelos considerados, los cuales se resumen en la Sección 4.1.2 y en la Tabla 4.1.1.

Con el propósito de inferir los parámetros de cada modelo, se explora el espacio de parámetros mediante el muestreador MCMC invariante bajo transformaciones afines, implementado en el paquete de Python `emcee`. La configuración del muestreo considera 60 caminantes y 30 000 pasos por caminante. Para asegurar la convergencia, se descarta una fase inicial de la cadena, equivalente a 10 veces el mayor tiempo de autocorrelación entre todos los parámetros. El cálculo de la verosimilitud incorpora los conjuntos de datos DESI, PP y PPS, obtenidos de la versión pública de CosmoSIS (Zuntz et al., 2015). Las distribuciones posteriores marginalizadas de los parámetros, junto con sus contornos de credibilidad, se obtienen a partir de las cadenas MCMC utilizando el paquete `ChainConsumer` (Hinton, 2016). En el muestreo MCMC se adoptan dos tipos de distribuciones previas: gaussianas, $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, descritas por una distribución normal con media μ y desviación estándar σ , y uniformes, $\mathcal{U}(a, b)$, en el intervalo $[a, b]$. Las distribuciones previas específicas asociadas a cada parámetro libre se resumen en la Tabla 7.0.1 y se utilizan de manera consistente en todo el análisis.

Se presenta el análisis observacional empleando un conjunto de datos cosmológicos con el propósito de restringir los parámetros de los modelos y evaluar su consistencia con los valores ac-

Tabla 7.0.1: Parámetros libre de los modelos analizados y las distribución previas adoptadas.

Modelos	Espacio de parámetros	Distribuciones previas
$m = 0$	Λ vCDM1 $\Theta = \{H_0, \Omega_{b,0}h^2, \Omega_{vc,0}h^2, \tilde{\zeta}_0, M\}$	$\pi(\Omega_{vc,0}h^2); \pi(\Omega_{c,0}h^2): \mathcal{N}(0.12, 0.01)$
	Λ vCDM1 + Ω_K $\Theta = \{H_0, \Omega_{K,0}, \Omega_{b,0}h^2, \Omega_{vc,0}h^2, \tilde{\zeta}_0, M\}$	$\pi(\Omega_{b,0}h^2): \mathcal{N}(0.022, 0.01)$
m libre	Λ vCDM2 $\Theta = \{H_0, \Omega_{b,0}h^2, \Omega_{vc,0}h^2, \tilde{\zeta}_0, m, M\}$	$\pi(\tilde{\zeta}_0): \mathcal{U}(0, 1)$
	Λ vCDM2 + Ω_K $\Theta = \{H_0, \Omega_{K,0}, \Omega_{b,0}h^2, \Omega_{vc,0}h^2, \tilde{\zeta}_0, m, M\}$	$\pi(m): \mathcal{U}(-2, 2)$
$\tilde{\zeta}_0 = 0$	Λ CDM $\Theta = \{H_0, \Omega_{b,0}h^2, \Omega_{c,0}h^2, M\}$	$\pi(H_0): \mathcal{U}(30, 99)$
	Λ CDM + Ω_K $\Theta = \{H_0, \Omega_{K,0}, \Omega_{b,0}h^2, \Omega_{c,0}h^2, M\}$	$\pi(\Omega_{K,0}): \mathcal{U}(-0.4, 0.4)$ $\pi(M): \mathcal{U}(-30, -5)$

tualmente aceptados. El conjunto de datos considerado incluye los CC, mediciones de las BAO (HBAO y DESI), SNe Ia (PP y PPS), así como R22. A partir de los datos, se definen tres combinaciones principales: **Base 1 (HBAO + PP)**, **Base 2 (HBAO + PPS)** y **Base 3 (HBAO + PPS + DESI)**.

Las funciones χ^2 conjuntas, asociadas a cada una de estas combinaciones, se construyen como la suma de las contribuciones individuales de cada conjunto de datos y están dadas por

$$\begin{aligned}
\chi_{\text{Base1}}^2 &= \chi_{\text{HBAO}}^2 + \chi_{\text{PP}}^2, \\
\chi_{\text{Base2}}^2 &= \chi_{\text{HBAO}}^2 + \chi_{\text{PPS}}^2, \\
\chi_{\text{Base3}}^2 &= \chi_{\text{HBAO}}^2 + \chi_{\text{PPS}}^2 + \chi_{\text{DESI}}^2.
\end{aligned} \tag{7.0.1}$$

Adicionalmente, se analizan las restricciones conjuntas obtenidas al incorporar los CC y R22 a cada una de las combinaciones base, dando lugar a los conjuntos: Base 1 + CC + R22, Base 2 + CC + R22, y Base 3 + CC + R22.

Los principales resultados presentados en este capítulo fueron publicados en el artículo *Bulk viscous cosmological models with cosmological constant: Observational constraints*, publicado en *Astronomy & Astrophysics* (Villalobos et al., 2026).

7.1. Caso con $m = 0$

Primero se analiza el escenario viscoso más simple, correspondiente al caso $m = 0$, el cual describe una viscosidad de volumen constante. Los resultados obtenidas para este escenario se resumen en la Tabla 7.6.1, donde se reportan los valores MAP y los intervalos de credibilidad al

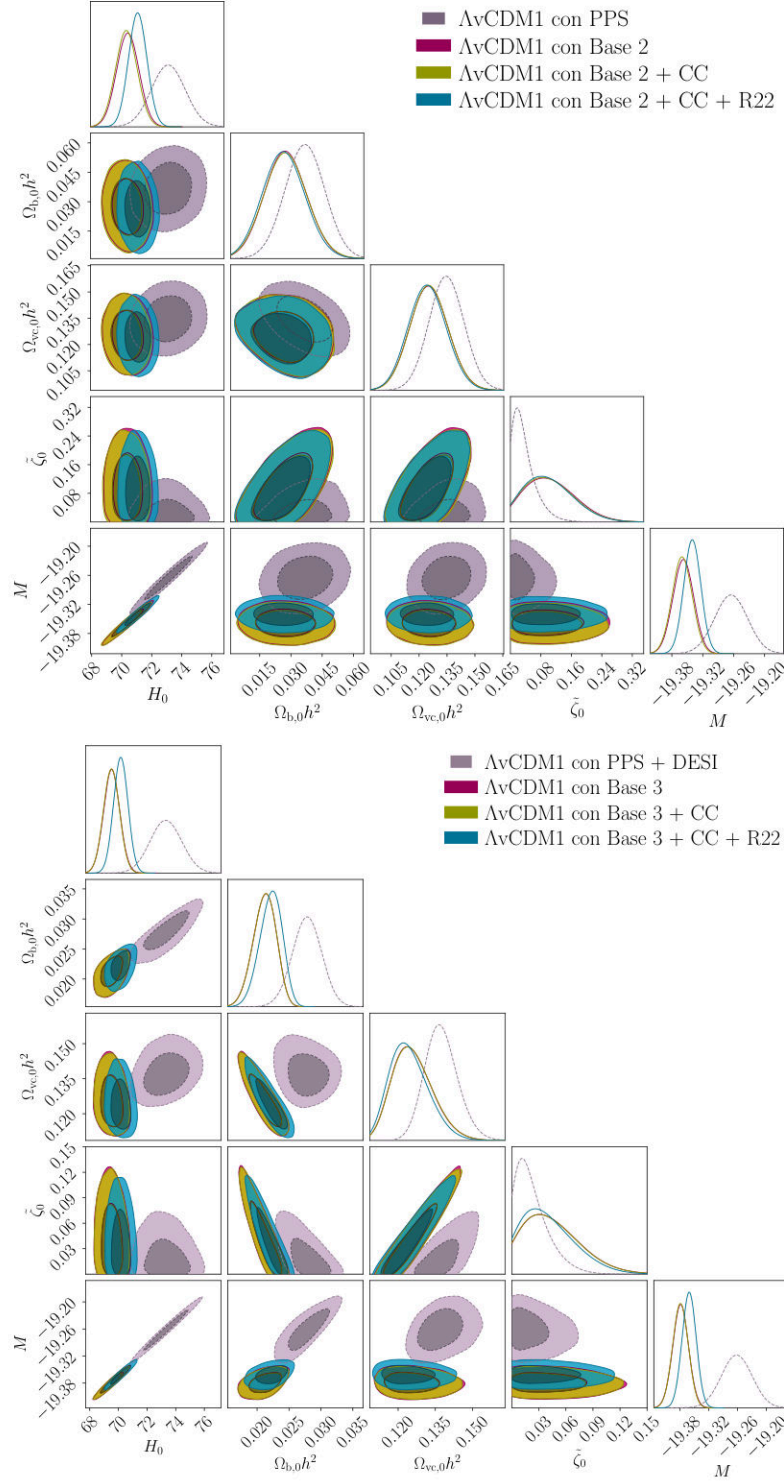


Figura 7.1.1: Distribuciones posteriores de los parámetros cosmológicos para un universo espacialmente plano con viscosidad constante ($m = 0$). *Panel superior:* combinaciones de datos PPS, Base 2, CC y R22. *Panel inferior:* combinaciones de datos PPS+DESI, Base 3, CC y R22. Los contornos muestran las regiones de credibilidad en 2D al 68 % y 95 %, junto con las distribuciones posteriores marginalizadas en 1D de cada parámetro.

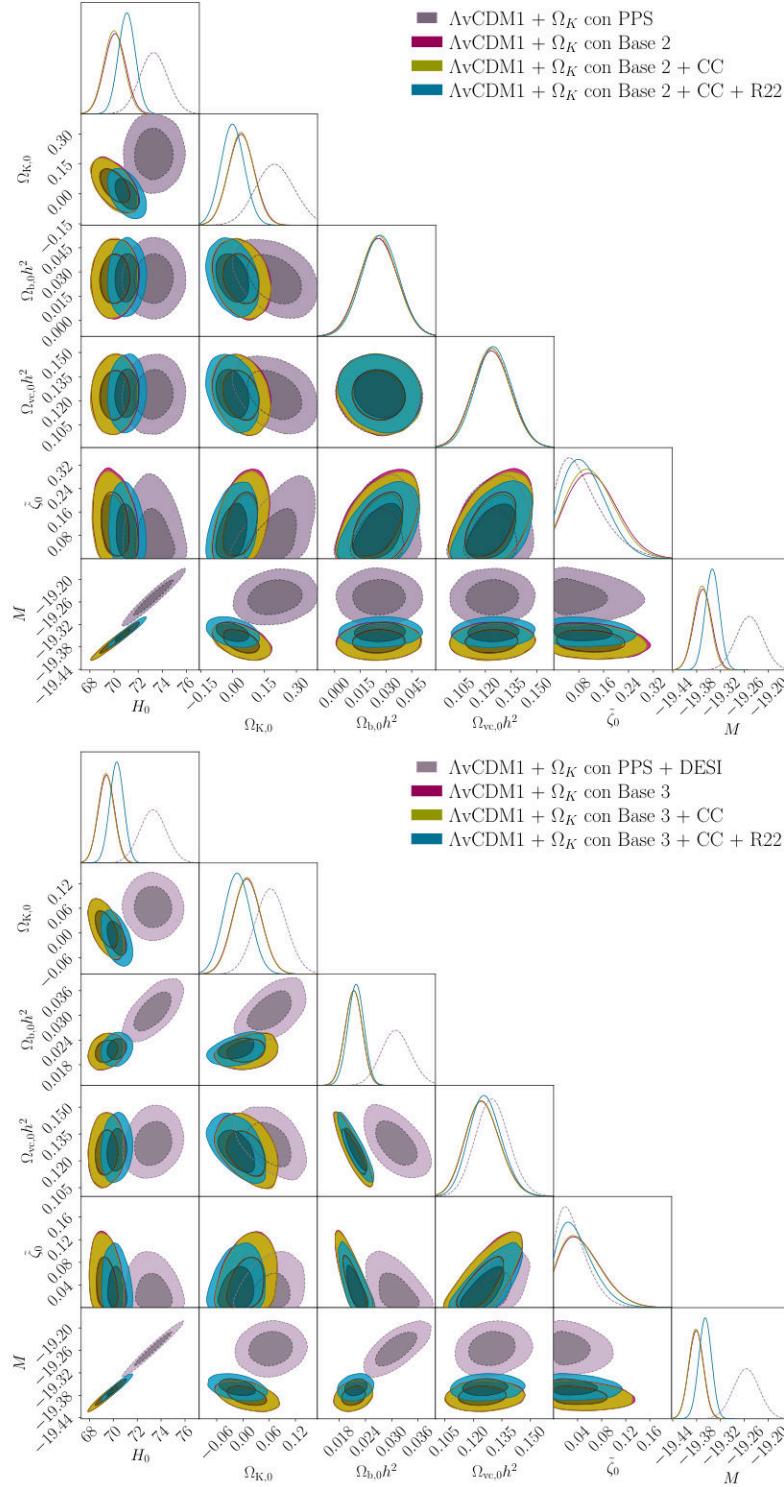


Figura 7.1.2: Distribuciones posteriores de los parámetros cosmológicos para un universo con curvatura espacial y viscosidad constante ($m = 0$). *Panel superior*: conjuntos de datos PPS, Base 2, CC y R22. *Panel inferior*: conjuntos de datos PPS+DESI, Base 3, CC y R22. Los contornos muestran regiones de credibilidad en 2D al 68% y 95%, junto con las distribuciones posteriores marginalizadas en 1D de cada parámetro.

68 % para cada parámetro. Tanto en el caso de un universo plano (Fig. 7.1.1) como en el de un universo con curvatura espacial (Fig. 7.1.2), se identifican fuertes correlaciones positivas entre H_0 y M ($\text{corr} > 0.95$) para todas las combinaciones de datos. Asimismo, se observa una correlación dependiente del conjunto de datos entre H_0 y el parámetro de curvatura $\Omega_{K,0}$, la cual resulta prácticamente despreciable cuando se considera únicamente la compilación PPS ($\text{corr} = 0.009$), mientras que al incorporar conjuntos de datos adicionales se vuelve moderadamente negativa ($\text{corr} \sim -0.5$). En los modelos con curvatura, H_0 presenta una correlación negativa más débil con el parámetro de viscosidad $\tilde{\zeta}_0$. Por su parte, $\tilde{\zeta}_0$ exhibe una correlación positiva con $\Omega_{K,0}$ (p. ej. $\text{corr} = 0.33$ para Base 2 + CC + R22, $\text{corr} = 0.51$ para PPS, y $\text{corr} = 0.27$ para PPS + DESI).

El análisis del escenario de universo plano, resumido en la Tabla 7.6.1, muestra que la combinación Base 1 conduce a un valor de la constante de Hubble $H_0 = 67.94^{+0.97}_{-0.92} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, mientras que Base 2 proporciona una estimación mayor, $H_0 = 70.39^{+0.75}_{-0.73} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, lo que se traduce en una tensión de $\sim 2\sigma$. Por su parte, Base 3 produce un valor intermedio, $H_0 = 69.53 \pm 0.56 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, reduciendo la discrepancia con Base 1 a $\sim 1.4\sigma$. Esta tendencia general se mantiene al incorporar los datos de los CC. La inclusión adicional de R22 reduce estas discrepancias a 1.19σ entre Base 1 + CC + R22 y Base 2 + CC + R22, y a solo 0.29σ entre Base 1 + CC + R22 y Base 3 + CC + R22, obteniéndose:

$$H_0 = 69.92^{+0.71}_{-0.74} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (\text{Base 1} + \text{CC} + \text{R22}), \quad (7.1.1a)$$

$$H_0 = 71.05^{+0.62}_{-0.60} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (\text{Base 2} + \text{CC} + \text{R22}), \quad (7.1.1b)$$

$$H_0 = 70.17^{+0.49}_{-0.51} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (\text{Base 3} + \text{CC} + \text{R22}). \quad (7.1.1c)$$

Estos resultados sugieren que tanto la incorporación de las mediciones locales de R22 como la inclusión de los datos de DESI contribuyen de manera efectiva a aliviar la tensión entre los distintos conjuntos de datos. En contraste, en el escenario con curvatura espacial se obtienen estimaciones sistemáticamente menores de H_0 . En particular, se obtiene $H_0 = 66.1^{+1.2}_{-1.1} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ para Base 1 y $H_0 = 66.3 \pm 1.1 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ al incluir CC. Sin embargo, al incorporar R22 en las combinaciones Base 2 + CC y Base 3 + CC, las estimaciones aumentan a $H_0 = 71.06 \pm 0.70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ y $H_0 = 70.28^{+0.60}_{-0.48} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, respectivamente. Estos valores compatibles con los obtenidos en el escenario plano, con diferencias menores a 0.2σ .

Adicionalmente, se observa que los conjuntos de datos influyen de manera significativa en la inferencia de la curvatura espacial. En particular, la incorporación de R22 favorece un universo plano, dando como resultado

$$\Omega_{K,0} = 0.049^{+0.059}_{-0.058} \quad (\text{Base 1} + \text{CC} + \text{R22}), \quad (7.1.2)$$

compatible dentro de 1σ . La inclusión de la compilación PPS refuerza estas restricciones, obteniéndose

$$\Omega_{K,0} = -0.002^{+0.056}_{-0.053} \quad (\text{Base 2} + \text{CC} + \text{R22}), \quad (7.1.3)$$

lo que indica una desviación de solo 0.04σ respecto a la planitud. Esta tendencia se confirma al considerar los datos de DESI, que conducen a los siguientes resultados, todos completamente consistentes con un universo plano:

$$\Omega_{K,0} = 0.009 \pm 0.032 \quad (\text{Base 3}), \quad (7.1.4a)$$

$$\Omega_{K,0} = 0.009^{+0.032}_{-0.031} \quad (\text{Base 3} + \text{CC}), \quad (7.1.4b)$$

$$\Omega_{K,0} = -0.014^{+0.030}_{-0.029} \quad (\text{Base 3} + \text{CC} + \text{R22}). \quad (7.1.4c)$$

Incluso con la incorporación de R22 no se observa ninguna desviación significativa de la planitud, con discrepancias del orden de $\sim 0.5\sigma$. En contraste, los demás conjuntos de datos muestran una preferencia por curvatura negativa a más de 2σ , lo que sugiere una tendencia moderada hacia un universo abierto. Por ejemplo, la muestra PPS por sí sola arroja $\Omega_{K,0} = -0.198^{+0.092}_{-0.092}$ (2.2σ), mientras que Base 1 conduce a $\Omega_{K,0} = 0.181^{+0.073}_{-0.074}$ (2.5σ). Esta tensión sugiere que las mediciones locales imponen restricciones más estrictas sobre la geometría espacial, rompiendo de manera efectiva la degeneración geométrica presente en otros conjuntos de datos.

En lo que respecta al coeficiente de viscosidad adimensional $\tilde{\zeta}_0$, se observa un buen acuerdo con los datos observacionales tanto en escenarios planos como no planos (véase Fig. 7.5.1). La viscosidad de volumen actual ζ_0 , calculada mediante la Ec. (4.1.11), resulta aproximadamente

$$\zeta_0 \sim 10^6 \text{ Pa s}, \quad (7.1.5)$$

en acuerdo con estimaciones previas (Normann & Brevik, 2017; Cruz et al., 2022a). Este valor es consistente con estudios que consideran únicamente el fondo cosmológico homogéneo e isótropo, lo que permite viscosidades de volumen relativamente grandes sin alterar de forma significativa la historia global de expansión. De acuerdo con Velten & Schwarz (2012), la materia oscura viscosa puede presentar una viscosidad de volumen de hasta $\zeta_0 \sim 10^7 \text{ Pa s}$ a nivel de fondo. Sin

embargo, cuando se consideran los efectos de la viscosidad de volumen en el crecimiento lineal de las perturbaciones de la materia oscura, las restricciones se vuelven considerablemente más estrictas. En este contexto, la velocidad de sonido efectiva, definida como $c_{\text{eff}}^2 = \delta\Pi/\delta\rho$, introduce términos adicionales de amortiguamiento dependientes de la escala, lo que conduce a una fuerte supresión de la formación de estructuras a pequeña escala. En consecuencia, se obtienen cotas tan estrictas como $\zeta_0 \lesssim 10^{-3}$ Pa s cuando se consideran tanto las perturbaciones lineales como las no lineales (Velten & Schwarz, 2012; Velten et al., 2014).

Cabe destacar que el uso exclusivo de la compilación PPS conduce, en el caso de geometría plana, a $\zeta_0 = (0.72_{-0.72}^{+1.35}) \times 10^6$ Pa s, con un límite inferior compatible con una viscosidad nula ($\zeta_0 \rightarrow 0$). Un comportamiento similar se observa al combinar PPS con el conjunto de datos DESI, obteniéndose $\zeta_0 = (0.47_{-0.47}^{+0.89}) \times 10^6$ Pa s. En contraste, los escenarios con curvatura espacial producen valores sistemáticamente mayores, alcanzando $\zeta_0 = (2.04_{-1.99}^{+3.46}) \times 10^6$ Pa s (PPS) y $\zeta_0 = (7.46_{-3.64}^{+3.60}) \times 10^6$ Pa s (Base 1). Al combinar la calibración local incluida en PPS con R22, se obtiene $\zeta_0 = (3.16_{-2.43}^{+3.17}) \times 10^6$ Pa s, en concordancia con los resultados del caso plano. Este patrón sugiere que las mediciones locales podrían imponer restricciones indirectas sobre los efectos viscosos en la dinámica de la expansión cósmica.

7.2. Caso con m libre

Se extiende el análisis al caso más general en el que el índice de viscosidad m se considera un parámetro libre. Utilizando los conjuntos de datos observacionales Base 1, Base 2 y Base 3, en combinación con los datos de CC y R22, se obtienen inferencias tanto para escenarios con geometría plana como para aquellos que incorporan curvatura espacial. Los resultados se resumen en la Tabla 7.6.2, donde se presentan los valores MAP y los intervalos de credibilidad al 68 % para cada parámetro. Adicionalmente, en la Fig. 7.2.1, se muestran las distribuciones posteriores correspondientes al caso de universo plano, mientras que la Fig. 7.2.2 presenta los resultados para el escenario con curvatura espacial. En ambas figuras se exhiben los contornos bidimensionales al 68 % y 95 % NC, así como las distribuciones posteriores marginalizadas unidimensionales correspondientes para los parámetros libres (véase la Tabla 7.0.1).

Al igual que en el caso $m = 0$, la Tabla 7.6.2 muestra que los conjuntos de datos influyen de manera significativa en las restricciones sobre la curvatura espacial. La muestra PPS, considerada de forma aislada, no impone límites estrictos sobre la curvatura, obteniéndose $\Omega_{K,0} = 0.205_{-0.094}^{+0.103}$, lo que corresponde a una desviación de 1.99σ . Este resultado es consistente dentro de 1σ con $\Omega_{K,0} = 0.07_{-0.13}^{+0.14}$, obtenido a partir de las cadenas del repositorio PP¹. Por otro lado, Base 1

¹https://github.com/PantheonPlusSH0ES/DataRelease/tree/main/Pantheon%2B_Data

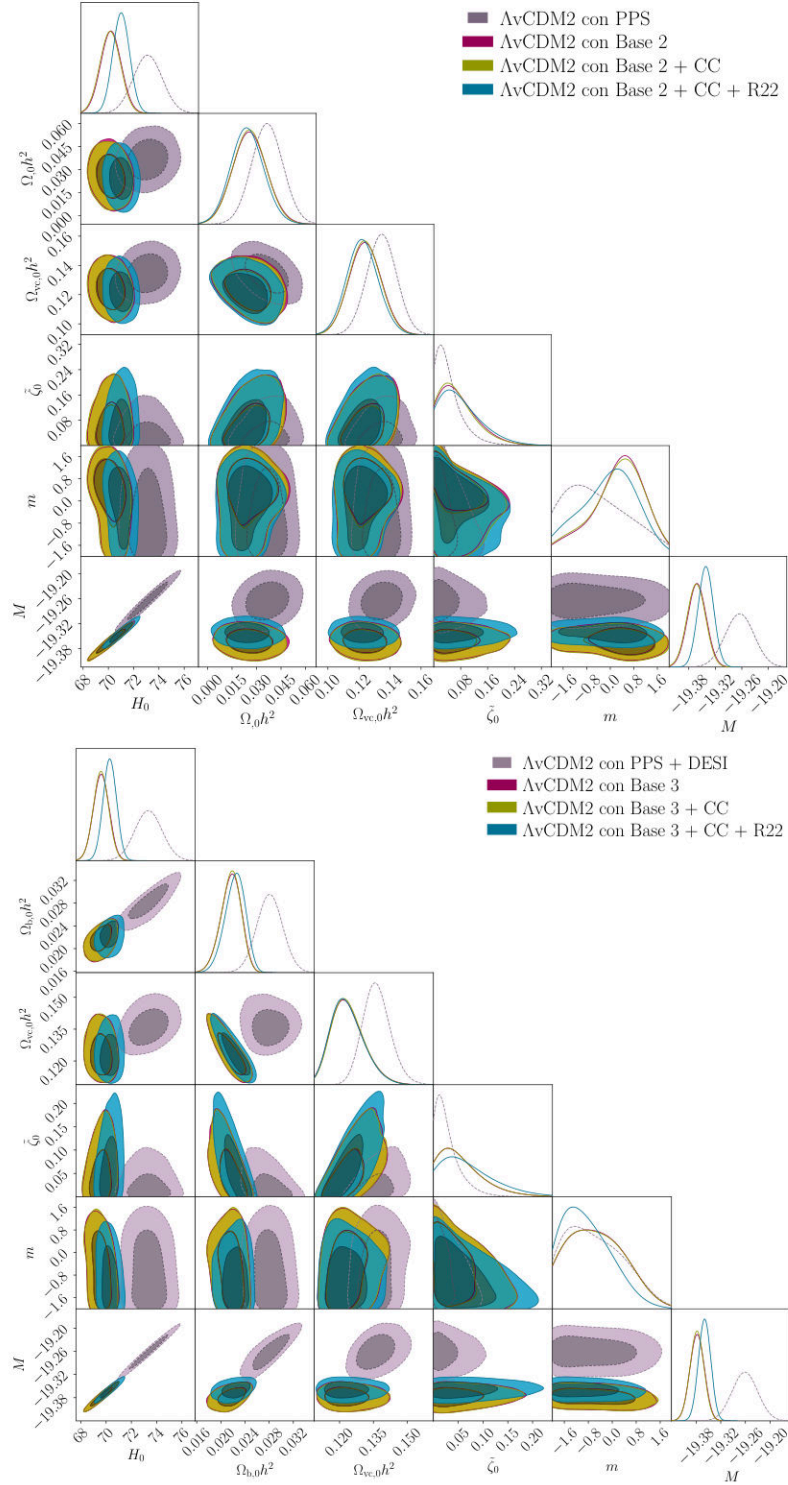


Figura 7.2.1: Distribuciones posteriores de los parámetros cosmológicos para un universo espacialmente plano con viscosidad y m libre. *Panel superior*: conjuntos de datos PPS, Base 2, CC y R22. *Panel inferior*: conjuntos de datos PPS + DESI, Base 3, CC y R22. Los contornos muestran regiones de credibilidad en 2D al 68 % y 95 %, junto con las distribuciones posteriores marginalizadas en 1D de cada parámetro.

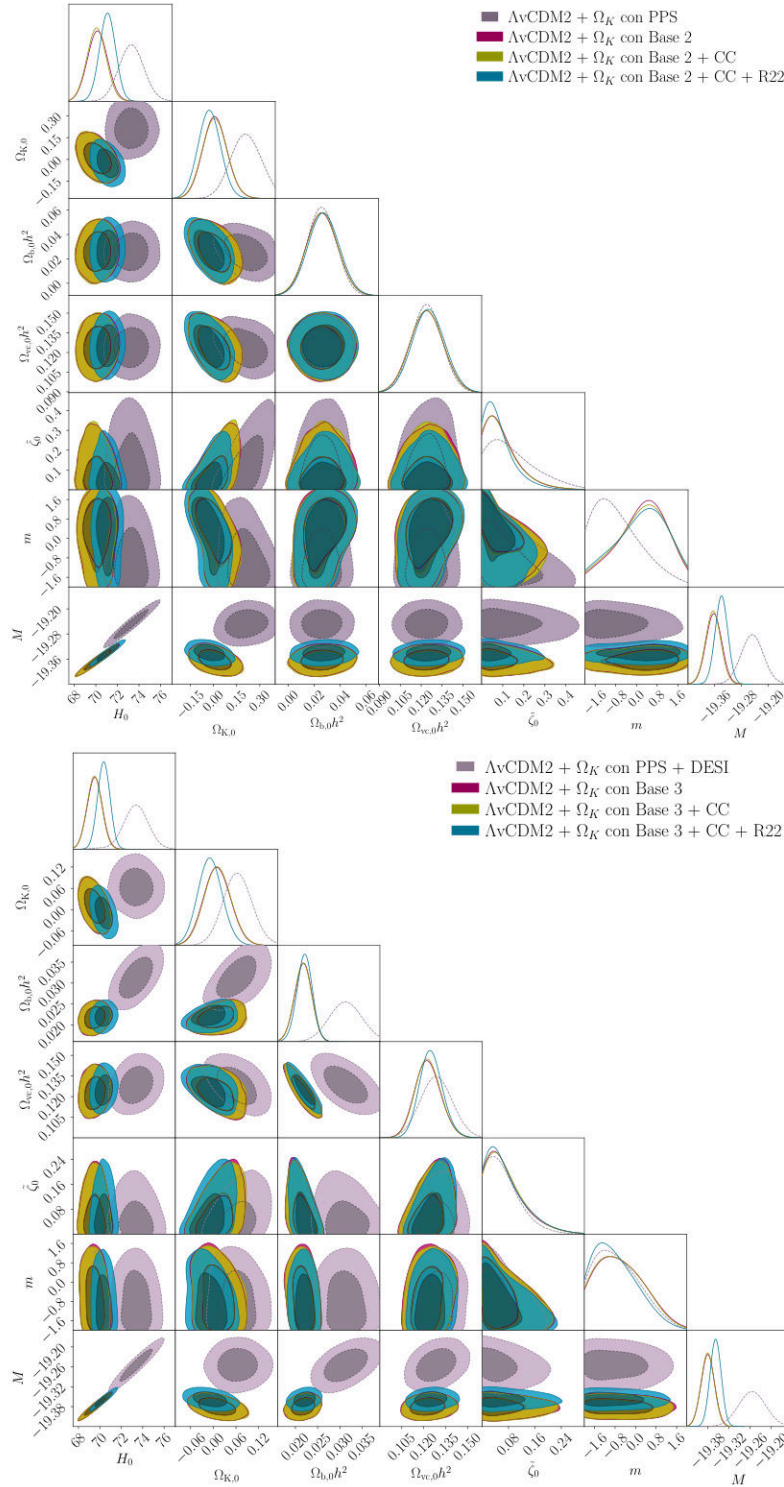


Figura 7.2.2: Distribuciones posteriores de los parámetros cosmológicos para un universo con curvatura espacial, viscosidad y m libre. *Panel superior*: conjuntos de datos PPS, Base 2, CC y R22. *Panel inferior*: conjuntos de datos PPS + DESI, Base 3, CC y R22. Los contornos muestran regiones de credibilidad en 2D al 68 % y 95 %, junto con las distribuciones posteriores marginalizadas en 1D de cada parámetro.

por sí sola muestra una leve preferencia por un universo abierto, con $\Omega_{K,0} = 0.21^{+0.13}_{-0.12}$, lo que corresponde a una desviación de 1.62σ respecto a la planitud. Sin embargo, al incluir R22 se recupera la consistencia con un universo plano dentro de 1σ , obteniéndose

$$\Omega_{K,0} = 0.026^{+0.087}_{-0.082} \quad (\text{Base 1} + \text{CC} + \text{R22}). \quad (7.2.1)$$

La inclusión adicional de la muestra PPS conduce a restricciones significativamente más estrictas:

$$\Omega_{K,0} = 0.007^{+0.079}_{-0.077} \quad (\text{Base 2}), \quad (7.2.2a)$$

$$\Omega_{K,0} = 0.008^{+0.078}_{-0.081} \quad (\text{Base 2} + \text{CC}). \quad (7.2.2b)$$

Este comportamiento se mantiene al incorporar los datos de DESI, que proporcionan las restricciones más precisas sobre la curvatura espacial, obteniéndose

$$\Omega_{K,0} = 0.008^{+0.037}_{-0.035} \quad (\text{Base 3}); \quad (7.2.3a)$$

$$\Omega_{K,0} = 0.010^{+0.036}_{-0.035} \quad (\text{Base 3} + \text{CC}); \quad (7.2.3b)$$

$$\Omega_{K,0} = -0.009 \pm 0.032 \quad (\text{Base 3} + \text{CC} + \text{R22}). \quad (7.2.3c)$$

Cabe destacar que, al tratar m como un parámetro libre en combinación con mediciones locales, se obtienen las restricciones más estrictas sobre la curvatura, lo que refuerza aún más la preferencia por la geometría plana.

Adicionalmente, se encuentra que la muestra PPS produce estimaciones de H_0 consistentes con las calibraciones de supernovas basadas en Cefeidas: $H_0 = 73.4 \pm 1.1 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (Brout et al., 2022) y $H_0 = 73.04 \pm 1.04 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (Riess et al., 2022), en todos los escenarios considerados. En particular, tanto para el caso $m = 0$ como para el caso con m libre, utilizando únicamente PPS se obtiene:

$$H_0 = 73.1 \pm 1.1 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (\Lambda\text{vCDM}), \quad (7.2.4a)$$

$$H_0 = 73.3 \pm 1.2 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (\Lambda\text{vCDM} + \Omega_K). \quad (7.2.4b)$$

De manera notable, no se observan desplazamientos significativos en los valores de H_0 entre los

escenarios $m = 0$, m libre y $\tilde{\zeta}_0 = 0$ para ninguno de los conjuntos de datos considerados (véanse las Tablas 7.6.1, 7.6.2 y 7.6.3).

En cuanto a la viscosidad de volumen actual, calculada a partir de la Ec. (4.1.11), los resultados conducen de forma sistemática a

$$\zeta_0 \sim 10^6 \text{ Pa s}, \quad (7.2.5)$$

tanto para geometrías planas como no planas, en concordancia con estimaciones previas (Normann & Brevik, 2017; Cruz et al., 2022a). En el caso de un universo plano, se observa un desplazamiento progresivo hacia valores mayores, que van desde $\zeta_0 = (0.51^{+1.10}_{-0.47}) \times 10^6 \text{ Pa s}$ (PPS + DESI) hasta $\zeta_0 = (1.97^{+2.88}_{-1.93}) \times 10^6 \text{ Pa s}$ (Base 2 + CC + R22).

Al permitir que la curvatura espacial sea un parámetro libre, se obtienen valores aún mayores, llegando a $\zeta_0 = (8.03^{+8.80}_{-6.89}) \times 10^6 \text{ Pa s}$ para Base 1, aunque disminuyen al incorporar CC y R22, $\zeta_0 = (1.30^{+2.73}_{-1.22}) \times 10^6 \text{ Pa s}$ para Base 3 + CC + R22. En todos los casos analizados, los valores inferidos de ζ_0 permanecen positivos. Esto se debe a la distribución previa adoptada para el parámetro adimensional $\tilde{\zeta}_0$, la cual incorpora la condición de positividad requerida para garantizar una producción no negativa de entropía en un universo en expansión, en concordancia con la segunda ley de la termodinámica (Weinberg, 1972).

A partir de las Figs. 7.2.1 y 7.2.2, se observa una correlación negativa moderada entre m y $\tilde{\zeta}_0$ (p. ej., $\text{corr} = -0.43$ para PPS y $\text{corr} = -0.52$ para Base 2 + CC), así como una anticorrelación entre m y $\Omega_{K,0}$ ($\text{corr} \sim -0.2$ para PPS y $\text{corr} \sim -0.5$ para los demás conjuntos de datos). En contraste, $\tilde{\zeta}_0$ y $\Omega_{K,0}$ presentan una correlación positiva ($\text{corr} \sim 0.5$) para todos los conjuntos de datos en el caso de m libre.

Finalmente, el signo de m en las Ecs. (4.1.10) y (4.1.11) determina la evolución de la viscosidad. Los valores negativos ($m < 0$) indican que la viscosidad aumenta a medida que la densidad de energía de la vCDM disminuye, es decir, crece con la expansión cósmica, mientras que los valores positivos ($m > 0$) corresponden a una viscosidad más intensa en el universo temprano que disminuye durante la expansión. El caso $m = 0$ representa una viscosidad constante. Los resultados (Tabla 7.6.2) muestran que este comportamiento depende del conjunto de datos considerado. Para geometría plana, PPS por sí solo favorece fuertemente $m < 0$ (p. ej., $m = -1.11^{+1.39}_{-0.82}$), mientras que las combinaciones de datos tienden a desplazar m hacia valores positivos. En escenarios no planos, este efecto se intensifica, llevando a valores más negativos de m (p. ej., $m = -1.27^{+1.10}_{-0.72}$ para PPS) y produciendo $m < -0.4$ para Base 1 (+CC), lo que sugiere un comportamiento viscoso dependiente de la curvatura. Sin embargo, al incorporar conjuntamente PPS y R22, m

se desplaza hacia valores positivos. Por otro lado, al incluir los datos de DESI, los resultados favorecen de manera consistente $m < 0$ tanto en escenarios planos como no planos, lo que sugiere que la viscosidad de volumen crece con la expansión cósmica.

7.3. Caso con $\tilde{\zeta}_0 = 0$

Con el fin de establecer un punto de referencia y garantizar la transparencia del análisis, se presentan en esta sección los resultados correspondientes al modelo Λ CDM, el cual representa el límite sin viscosidad de volumen ($\tilde{\zeta}_0 = 0$). Los valores inferidos para los parámetros cosmológicos, junto con sus intervalos de credibilidad al 68 %, se resumen en la Tabla 7.6.3.

La Fig. 7.3.1 muestra las distribuciones posteriores obtenidas para el modelo Λ CDM utilizando la muestra PPS (gris púrpura), mientras que la Fig. 7.3.2 presenta los resultados para el conjunto de datos PPS + DESI (púrpura) para el modelo Λ CDM + Ω_K . En ambas figuras, se incluyen las regiones de confianza obtenidas a partir del muestreo MCMC para las demás combinaciones de datos consideradas: Base 2, Base 2 + CC y Base 2 + CC + R22 (magenta oscuro, verde y azul mar, respectivamente), junto con sus contrapartes Base 3, manteniendo el mismo esquema de colores. En todos los casos, las cadenas MCMC muestran una rápida convergencia y conducen a distribuciones aproximadamente gaussianas.

En el análisis correspondiente al caso $\tilde{\zeta}_0 = 0$, se adoptan las distribuciones previas listadas en la Tabla 7.0.1, considerando distribuciones previas gaussianas para los parámetros de densidad $\Omega_{c,0}h^2$ y $\Omega_{b,0}h^2$, y distribuciones previas uniformes para los parámetros restantes, H_0 y M . Para la extensión con curvatura espacial, Λ CDM + Ω_K , se asume además una distribución previa uniforme para el parámetro de curvatura $\Omega_{K,0}$.

7.4. Modelos de selección

En las secciones anteriores, se estimaron los valores de los parámetros cosmológicos de los distintos modelos, junto con sus incertidumbres, mediante el análisis de sus respectivas funciones de verosimilitud. Como medida de ajuste, se consideraron los valores mínimos de χ^2 , denotados por $\chi^2_{\min}$. Con el objetivo de evaluar su desempeño relativo respecto al modelo de referencia Λ CDM, se calculan los criterios de información AIC, BIC y DIC, definidos en la Sección 5.5.2, en las Ecs. (5.5.7), (5.5.9) y (5.5.10), respectivamente. Como complemento a estos criterios, se considera la evidencia bayesiana, la cual incorpora la información previa y permite realizar comparaciones más completas entre modelos.

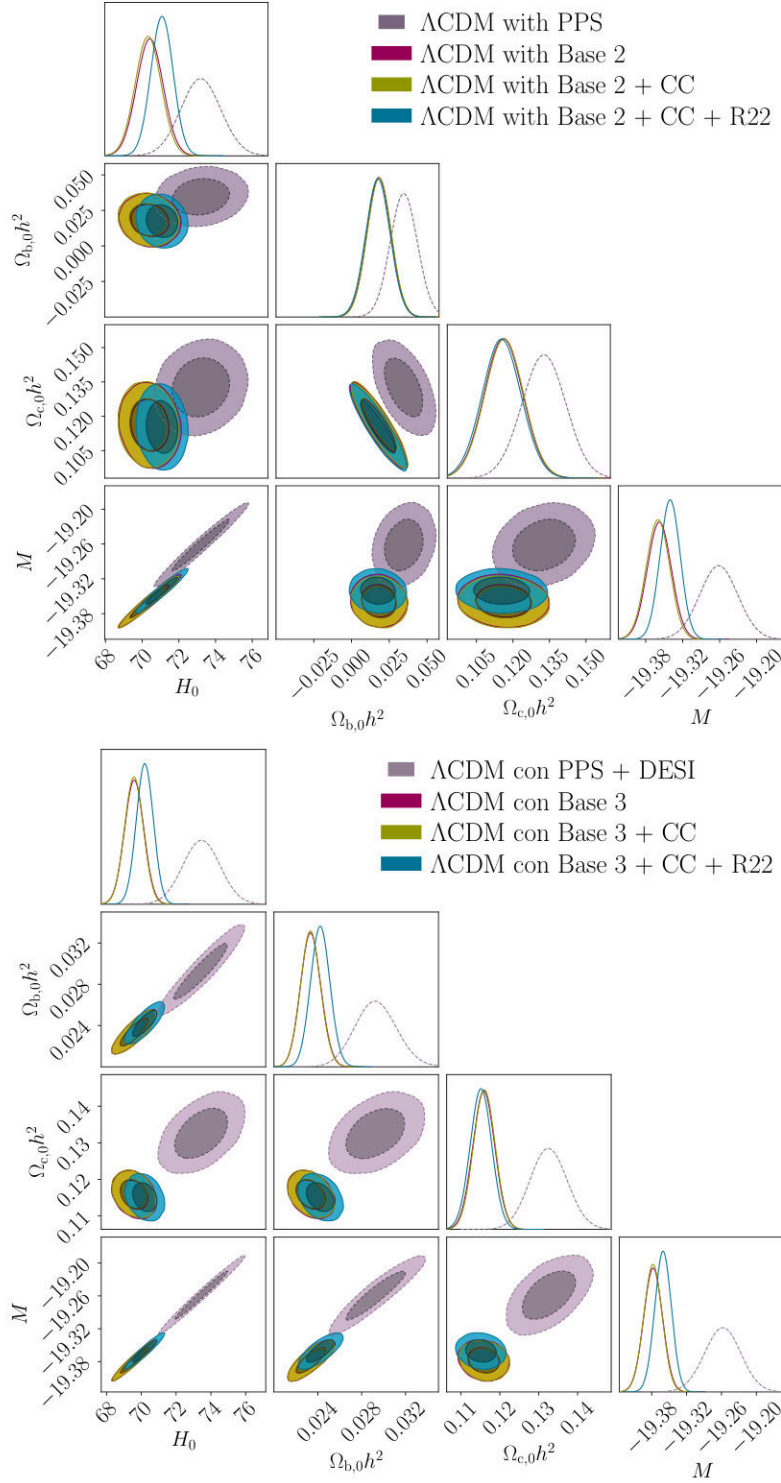


Figura 7.3.1: Distribuciones posteriores de los parámetros cosmológicos para el modelo Λ CDM donde $\tilde{\zeta}_0 = 0$. *Panel superior*: conjuntos de datos PPS, Base 2, CC y R22. *Panel inferior*: conjuntos de datos PPS+DESI, Base 3, CC y R22. Los contornos muestran regiones de credibilidad en 2D al 68% y 95%, junto con sus distribuciones posteriores marginalizadas en 1D de cada parámetro.

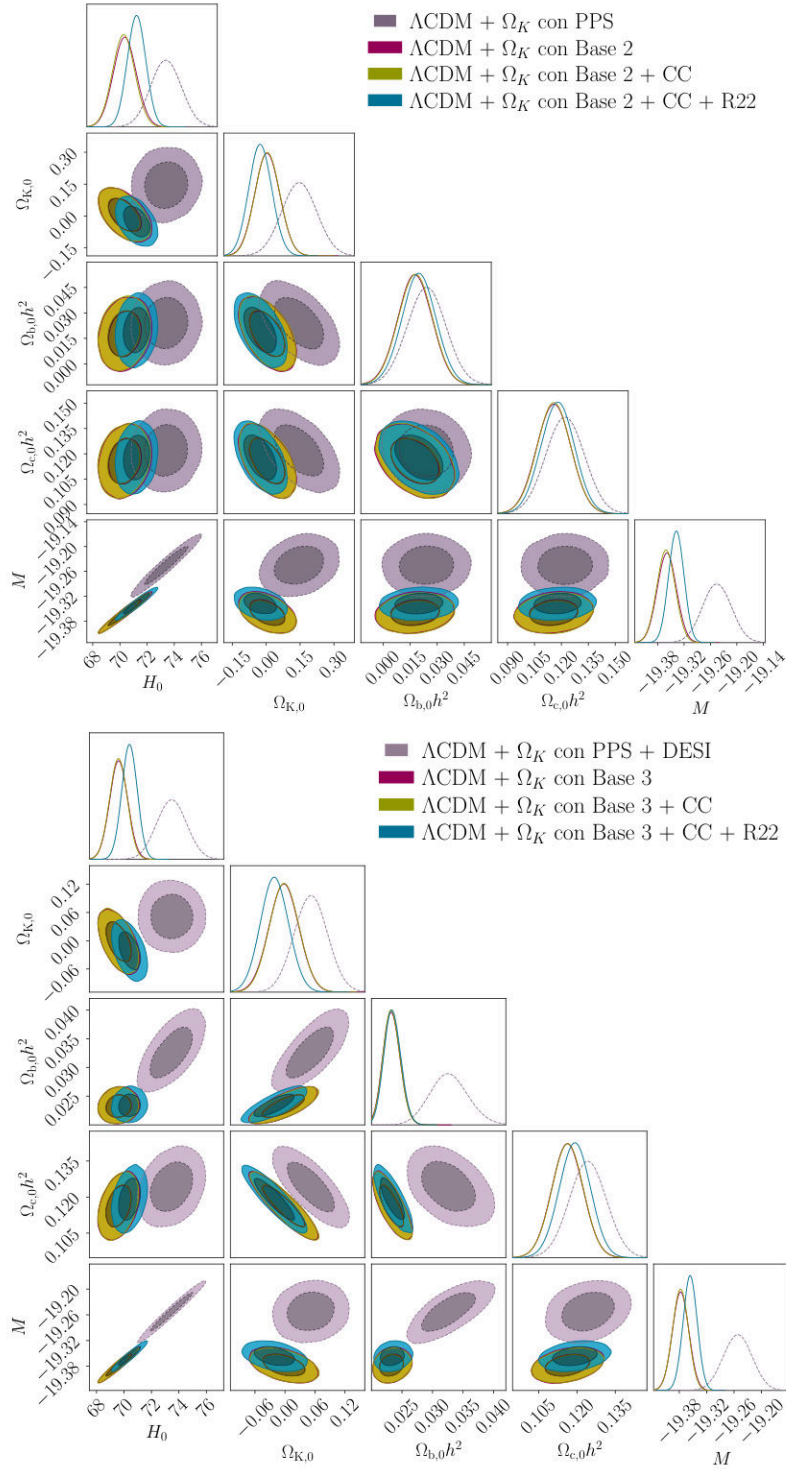


Figura 7.3.2: Distribuciones posteriores de los parámetros cosmológicos para Λ CDM + Ω_K donde $\tilde{\zeta}_0 = 0$. *Panel superior*: conjuntos de datos PPS, Base 2, CC y R22. *Panel inferior*: conjuntos de datos PPS+DESI, Base 3, CC y R22. Los contornos muestran regiones de credibilidad en 2D al 68 % y 95 %, junto con sus distribuciones posteriores marginalizadas en 1D de cada parámetro.

En las Tablas 7.6.4 y 7.6.5 se presentan los valores de Δ IC, entendiendo IC de manera genérica como cualquiera de los criterios de información considerados (AIC, BIC o DIC), relativos al modelo de referencia Λ CDM ($\tilde{\zeta}_0 = 0$), definidos como

$$\Delta\text{IC} = \text{IC}_{\Lambda\text{CDM}} - \text{IC}_i, \quad (7.4.1)$$

de modo que un valor positivo de Δ IC indica una preferencia por el modelo viscoso. Asimismo, se reporta la evidencia bayesiana ($\ln \mathcal{E}_i$) y el correspondiente factor de Bayes ($\ln \mathcal{B}_i$) para todos los modelos viscosos analizados, cuya definición e interpretación se detallan en la Sección 5.5.1.

7.4.1. Criterios de Información

A partir de las Tablas 7.6.4 y 7.6.5, se observa que tanto la muestra PPS por sí sola como sus combinaciones con los datos de DESI conducen a valores de $\Delta\text{AIC} < 0$ en los cuatro escenarios considerados, lo que indica una preferencia por el modelo Λ CDM.

Para el caso $m = 0$, los escenarios de geometría plana presentan $\Delta\text{AIC} > 0$ para las combinaciones Base 1 y Base 2, mientras que PPS y los conjuntos que incluyen DESI presentan $\Delta\text{AIC} < 0$, indicando una preferencia débil por Λ CDM. En particular, los modelos viscosos muestran una preferencia positiva al emplear los conjuntos Base 1 (+ CC). Sin embargo, esta preferencia se debilita al incorporar la muestra PPS y R22. Por ejemplo, se obtiene $\Delta\text{AIC} = 1.75$ para Base 1 + CC + R22 y $\Delta\text{AIC} = 0.62$ para Base 2 + CC + R22, aunque al considerar Base 2 de forma aislada, se mantiene evidencia positiva a favor del modelo viscoso.

En el caso de los modelos Λ vCDM + Ω_K con $m = 0$, se encuentra una evidencia más fuerte contra Λ CDM al utilizar el conjunto Base 1, así como evidencia positiva al considerar Base 1 + CC. En contraste, el modelo Λ CDM resulta débilmente preferido cuando se incluye la muestra PPS o R22. En particular, se obtiene $\Delta\text{AIC} = -0.90$ para Base 1 + CC + R22, $\Delta\text{AIC} = -0.29$ para Base 2, y $\Delta\text{AIC} = -0.82$ para Base 3 y Base 3 + CC.

Para el caso con m libre, los modelos Λ vCDM muestran evidencia a favor del escenario viscoso únicamente al emplear el conjunto Base 1 y su combinación con CC, con $\Delta\text{AIC} = 6.53$ y $\Delta\text{AIC} = 6.63$, respectivamente. No obstante, esta preferencia se debilita al incorporar R22 (p. ej., $\Delta\text{AIC} = 1.07$ para Base 1 + CC + R22) y se pierde al incluir la muestra PPS o los datos de DESI, para los cuales se obtienen valores $\Delta\text{AIC} < 0$, indicando una preferencia por el modelo Λ CDM. En contraste, los modelos Λ vCDM + Ω_K presentan valores $\Delta\text{AIC} > 2$ para los conjuntos con Base 1 y Base 2, mientras que la inclusión de DESI conduce nuevamente a $\Delta\text{AIC} < 0$.

En cuanto al criterio BIC, todos los escenarios viscosos presentan $\Delta\text{BIC} < 0$, favoreciendo al modelo Λ CDM (véase las Tablas 7.6.4 y 7.6.5). En general, los valores de ΔBIC imponen una fuerte penalización a los modelos viscosos en casi todos los casos.

Para $m = 0$, el modelo Λ vCDM + Ω_K arroja $\Delta\text{BIC} < -11$ al incluir R22 y la muestra PPS, lo que indica evidencia muy fuerte en contra de este escenario viscoso con curvatura espacial. Incluso en ausencia de estas mediciones locales, se obtiene evidencia positiva contra Λ vCDM + Ω_K ; por ejemplo, $\Delta\text{BIC} = -4.78$ con Base 1. En los escenarios planos, las restricciones de Base 2 + CC + R22 proporcionan evidencia positiva contra Λ vCDM ($\Delta\text{BIC} = -4.83$), mientras que al considerar solo Base 1 y Base 1 + CC se obtiene evidencia débil ($\Delta\text{BIC} = -0.84$ y $\Delta\text{BIC} = -0.65$, respectivamente).

Para el caso de m libre, el modelo Λ vCDM + Ω_K presenta evidencia muy fuerte en contra de este escenario curvo para todos los conjuntos de datos ($\Delta\text{BIC} < -11$), con un valor máximo de $\Delta\text{BIC} = -21.97$ al considerar únicamente la muestra PPS. No obstante, al excluir las mediciones locales (muestra PPS y R22), la evidencia se debilita, obteniéndose únicamente evidencia positiva contra los modelos viscosos, con $\Delta\text{BIC} = -4.25$ para Base 1 y $\Delta\text{BIC} = -4.19$ para Base 1 + CC.

El análisis basado en el criterio DIC revela patrones diferenciados entre las configuraciones de los modelos. Los cuatro escenarios muestran un soporte mixto dependiendo del conjunto de datos. El modelo plano con viscosidad constante presenta valores que van desde $\Delta\text{DIC} = -0.6$ (PPS) hasta $\Delta\text{DIC} = 3.31$ (Base 1 + CC), lo que indica evidencia débil a positiva contra Λ CDM. En contraste, los modelos con curvatura muestran una evidencia más fuerte contra Λ CDM, especialmente para los conjuntos Base 1 y Base 1 + CC, tendencia que persiste cuando m se considera libre. La inclusión de PPS y de R22 reduce sistemáticamente el soporte a favor de los modelos viscosos en todos los escenarios. Cabe destacar que el modelo Λ vCDM + Ω_K con m libre presenta la evidencia más fuerte contra Λ CDM, alcanzando $\Delta\text{DIC} = 15.53$ para Base 2, lo que corresponde a la evidencia más fuerte frente a Λ CDM dentro de este criterio.

7.4.2. Factor de Bayes

Como complemento a los criterios de información, se emplea la evidencia bayesiana, la cual permite comparaciones más detalladas entre modelos al incorporar explícitamente la información previa. Mientras que los criterios AIC y BIC aplican penalizaciones fijas basadas en el número de parámetros, y el DIC refina este enfoque mediante el uso del número efectivo de parámetros restringidos por los datos a partir de las distribuciones posteriores, la evidencia bayesiana penaliza de manera natural aquellos parámetros que no están bien constreñidos por los datos a través de la marginalización sobre el espacio de las distribuciones previas.

Para estimar el logaritmo natural de la evidencia bayesiana de los modelos con viscosidad de volumen en relación con Λ CDM, se utiliza el código `MCEvidence`² (Heavens et al., 2017a,b). A partir de las cadenas MCMC obtenidas en la inferencia de parámetros, se calculan los factores de Bayes correspondientes para las distintas combinaciones de modelos y conjuntos de datos. La interpretación de los resultados se realiza mediante la escala de Jeffreys (Jeffreys, 1961; Kass & Raftery, 1995), adoptando la convención propuesta por Heavens et al. (2017b), la cual se resume en la Tabla 5.5.1.

Siguiendo las Refs. (Heavens et al., 2017a,b), se calcula $\ln \mathcal{B}_{0i}$, donde 0 denota al modelo de referencia Λ CDM e i a cada uno de los cuatro modelos con viscosidad de volumen. Los resultados para todas las combinaciones de modelos y conjuntos de datos se resumen en la Tablas 7.6.4 y 7.6.5, y se obtienen a partir de la expresión dada en la Ec. (5.5.6), es decir,

$$\ln \mathcal{B}_{0i} = \ln \mathcal{E}_{\Lambda\text{CDM}} - \ln \mathcal{E}_i.$$

A partir de las Tablas 7.6.4 y 7.6.5 se encuentra evidencia moderada contra ambos escenarios Λ vCDM + Ω_K , tanto para el caso $m = 0$ como para el caso m libre, con valores $3 \leq \ln \mathcal{B}_{0i} < 5$ para la mayoría de los conjuntos de datos. Esta evidencia en contra de los modelos viscosos con curvatura espacial se intensifica notablemente al incluir los datos de DESI, alcanzando $\ln \mathcal{B}_{0i} > 5$ en todos los conjuntos considerados. El caso más desfavorecido corresponde al escenario $m = 0$ bajo el conjunto Base 3 + CC + R22, para la cual se obtiene $\ln \mathcal{B}_{0i} = 7.18$.

Por el contrario, los modelos Λ vCDM con viscosidad constante ($m = 0$) presentan únicamente evidencia débil en todos los conjuntos de datos analizados. Por ejemplo, $\ln \mathcal{B}_{0i} = 1.34$ para Base 2 + CC + R22 y $\ln \mathcal{B}_{0i} = 1.40$ para Base 2. Mientras que los modelos con m libre resultan, en general, inconclusos de acuerdo con la escala de Jeffreys.

7.5. Evolución de parámetros cosmológicos

El panel izquierdo de la Fig. 7.5.1 muestra la evolución del parámetro de Hubble en función del corrimiento al rojo, de acuerdo con la Ec. (4.1.14). El modelo presenta un buen acuerdo con los datos observacionales del parámetro de Hubble (CC, HBAO, y R22).

Por otro lado, el módulo de distancia para las SNe Ia, derivado del modelo y expresado en la Ec. (6.1.3), se compara con la muestra PPS. Esta compilación comprende 1701 curvas de luz correspondientes a 1550 SNe Ia distintas y cubre un amplio rango de corrimiento al rojo, como se

²El código se encuentra disponible públicamente en <https://github.com/yabebalFantaye/MCEvidence>.

muestra en el panel derecho de la Fig. 7.5.1. En este caso, el modelo reproduce adecuadamente las observaciones, mostrando un buen nivel de concordancia con los datos de supernovas en todo el rango explorado.

7.6. Conclusiones

En este capítulo se llevó a cabo un análisis observacional de cuatro modelos cosmológicos con viscosidad de volumen y constante cosmológica, en los cuales el coeficiente de viscosidad de volumen evoluciona de acuerdo con una ley de potencia,

$$\zeta = \zeta_0 \left(\frac{\Omega_{\text{vc}}}{\Omega_{\text{vc},0}} \right)^m.$$

Se exploraron tanto el caso de viscosidad constante ($m = 0$) como el escenario de viscosidad variable (m libre), considerando geometrías espaciales planas y con curvatura. Mediante un enfoque bayesiano basado en muestreo de MCMC, estos modelos fueron restringidos utilizando mediciones observacionales del parámetro de Hubble $H(z)$ a partir de los CC, una compilación independiente de datos de las BAO (HBAO), incluyendo las mediciones de DESI DR2, datos de SNe Ia (PP/PPS) y R22. A partir de este análisis, se obtienen las siguientes conclusiones principales.

La tensión en H_0 persiste, aunque se ve parcialmente aliviada en todos los escenarios analizados cuando se incorporan mediciones locales. Para los casos planos se obtuvieron $H_0 = 67.94^{+0.97}_{-0.92} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (Base 1, $m = 0$), $H_0 = 70.39^{+0.75}_{-0.73} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (Base 2, $m = 0$), y $H_0 = 69.53 \pm 0.56 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (Base 3, $m = 0$). Al combinar los conjuntos de datos con R22, la tensión se reduce aproximadamente a 1σ , obteniéndose $H_0 = 69.92^{+0.71}_{-0.74} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (Base 1 + CC + R22), $H_0 = 71.05^{+0.62}_{-0.60} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (Base 2 + CC + R22), y $H_0 = 70.17^{+0.49}_{-0.51} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (Base 3 + CC + R22). Esta reducción de la tensión se mantiene en todas las configuraciones consideradas: geometría espacial (plana o con curvatura), evolución de la viscosidad de tipo ley de potencia ($m = 0$ o m libre) y escenarios con viscosidad de volumen actual nula ($\tilde{\zeta}_0 = 0$).

En los escenarios no planos, los modelos inicialmente favorecen valores positivos del parámetro de curvatura ($\Omega_{K,0} > 0$) con una significancia superior a 2σ , lo que sugiere una preferencia moderada por un universo abierto. Sin embargo, al incluir la compilación PPS y R22, las restricciones se desplazan hacia la planitud espacial, $\Omega_{K,0} \simeq 0$, siendo consistentes dentro de 1σ . Esta preferencia por un universo plano se refuerza notablemente, y con incertidumbres aún más estrechas, al incorporar los datos de DESI en cualquiera de las combinaciones de conjuntos observacionales.

Los resultados indican que la viscosidad de volumen actual presenta un valor característico del

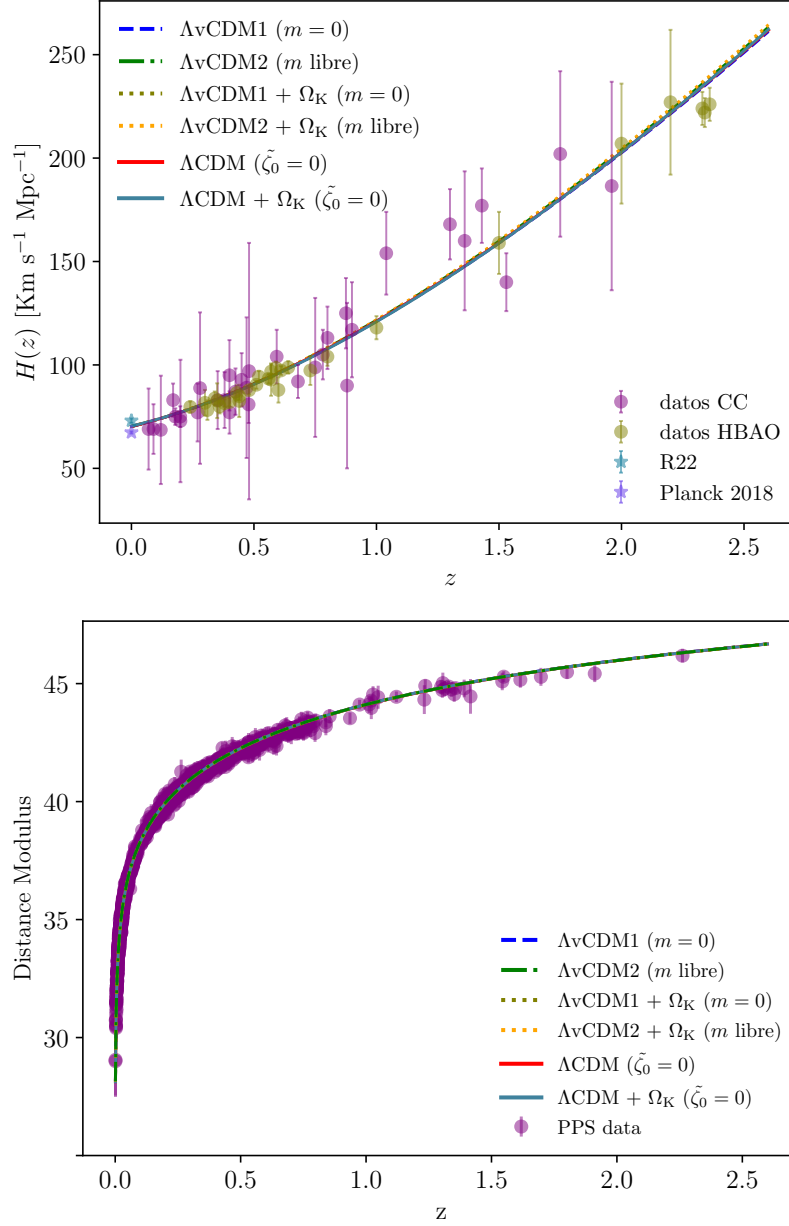


Figura 7.5.1: *Panel superior*: Evolución del parámetro de Hubble $H(z)$ en función del corrimiento al rojo z . Se muestran datos observacionales independientes del parámetro de Hubble, todos con sus respectivas barras de error: CC (puntos púrpura, $0.07 < z < 1.965$), HBAO (puntos verde oliva, $0.24 < z < 2.36$), la determinación local de H_0 desde SH0ES (R22; estrella azul marino) y el valor inferido del CMB (Planck 2018; estrella morada). *Panel inferior*: Módulo de distancia observado de la compilación PPS (puntos púrpura con barras de error) en el intervalo $0.001 < z < 2.26$. En ambas figuras, los datos se comparan con las predicciones teóricas: las líneas continuas roja y verde corresponden a los modelos Λ CDM y Λ CDM + Ω_K , respectivamente; las líneas discontinuas, punto-guion y punteadas representan los distintos escenarios de los modelos con viscosidad. Los parámetros han sido restringidos utilizando la combinación de datos Base 3 + CC + R22.

orden de $\zeta_0 \sim 10^6$ Pa s en todos los escenarios investigados. Este resultado es coherente con la jerarquía conocida de restricciones cosmológicas, en la cual la dinámica del fondo permite valores de viscosidad varios órdenes de magnitud mayores que aquellos compatibles con la formación de estructuras a pequeña escala, como se ha discutido en trabajos previos (Velten & Schwarz, 2012; Velten et al., 2014). Además, los valores positivos de ζ_0 preferidos por los datos son físicamente consistentes, ya que satisfacen la segunda ley de la termodinámica dentro del formalismo de Eckart y permanecen compatibles con las observaciones cosmológicas. En particular, los valores obtenidos abarcan desde $\zeta_0 = 0.47^{+0.89}_{-0.47} \times 10^6$ Pa s (PPS + DESI, caso plano) hasta $\zeta_0 = 7.46^{+3.60}_{-3.64} \times 10^6$ Pa s (Base 1, caso no plano).

Por otra parte, el parámetro que controla la evolución de la viscosidad, el índice de viscosidad m , permanece débilmente constreñido. El uso exclusivo de la muestra PPS favorece valores negativos ($m < 0$), lo que implica una viscosidad que aumenta a medida que la densidad disminuye, es decir, que crece con la expansión cósmica. Esta tendencia se refuerza al incluir los datos de DESI, los cuales favorecen sistemáticamente $m < 0$ tanto en escenarios planos como no planos, sugiriendo que la viscosidad de volumen adquiere mayor relevancia en épocas tardías del universo. En contraste, los análisis conjuntos que no incorporan DESI tienden a preferir $m > 0$, lo que indicaría una mayor dominancia de la viscosidad en etapas tempranas de la evolución cosmológica.

Los criterios de selección de modelos presentan un panorama matizado. Se encontró que los criterios AIC y DIC favorecen a los modelos viscosos en algunos conjuntos observacionales (p. ej. $\Delta\text{AIC} > 4$ y $\Delta\text{DIC} > 6$ para Base 1 (+CC)), mientras que el criterio BIC prefiere de manera sistemática al modelo de referencia Λ CDM, debido a su penalización más severa de los parámetros adicionales. Asimismo, los cálculos de evidencia bayesiana muestran evidencia moderada en contra de los escenarios viscosos no planos, con $3 \leq \ln \mathcal{B}_{0i} < 5$ para la mayoría de los conjuntos de datos. Esta evidencia en contra de los modelos con curvatura espacial se vuelve particularmente fuerte al incluir los datos de DESI, para los cuales se obtiene $\ln \mathcal{B}_{0i} > 5$ en todas las combinaciones analizadas. En conjunto, estos resultados indican que, si bien la viscosidad de volumen puede mejorar de forma moderada el ajuste cosmológico, no resuelve de manera definitiva la tensión en H_0 ni supera al modelo Λ CDM cuando se consideran las mediciones locales.

Finalmente, el análisis revela grandes incertidumbres tanto en m como en ζ_0 al emplear datos de $H(z)$, muestras de SNe Ia y R22, lo que pone de manifiesto que estos conjuntos observacionales no son suficientes para discriminar de forma concluyente entre los distintos escenarios viscosos. En consecuencia, el modelo estándar Λ CDM continúa siendo la descripción más parsimoniosa del universo a nivel del fondo cosmológico.

Tablas del Capítulo

Las restricciones cosmológicas sobre los parámetros H_0 , $\Omega_{K,0}$, $\Omega_{b,0}h^2$, $\Omega_{vc,0}h^2$, M , $\tilde{\zeta}_0$ y m se resumen en las Tablas 7.6.1, correspondientes a los modelos Λ vCDM y Λ vCDM + Ω_K con viscosidad de volumen constante y con índice de viscosidad libre, respectivamente, considerando los distintos conjuntos de datos observacionales empleados en el análisis.

Además, la comparación entre el modelo estándar Λ CDM y su extensión con curvatura espacial se presenta en la Tabla 7.6.3, donde se incluyen los criterios de información y la evidencia bayesiana.

Finalmente, las Tablas 7.6.4 y 7.6.5 muestran la comparación estadística entre los modelos cosmológicos viscosos y el modelo Λ CDM, considerando $\chi^2_{\min}$, los criterios de información, la evidencia bayesiana y el factor de Bayes, para los escenarios con $m = 0$ y m libre, respectivamente.

Tabla 7.6.1: Resumen de las distribuciones posteriores marginalizadas para los parámetros cosmológicos de los escenarios Λ CDM y Λ vCDM + Ω_K , correspondientes al caso de viscosidad de volumen constante, para distintos conjuntos de datos observacionales. Se presentan el MAP y los intervalos de credibilidad al 68 % para cada parámetro. El parámetro de viscosidad ζ_0 se calcula mediante la Ec. (4.1.11). Las unidades utilizadas son H_0 en $\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ y ζ_0 en Pa.s.

Datos	H_0	$\Omega_{K,0}$	$\Omega_{b,0}h^2$	$\Omega_{\text{vc},0}h^2$	M	$\tilde{\zeta}_0$	$\zeta_0 (\times 10^9)$
ΛvCDM1							
PPS	73.1 ± 1.1	—	0.037 ± 0.010	0.135 ± 0.009	-19.265 ± 0.032	$0.017^{+0.032}_{-0.017}$	$0.72^{+1.35}_{-0.72}$
PPS + DESI	73.3 ± 1.1	—	0.028 ± 0.002	$0.137^{+0.007}_{-0.006}$	-19.262 ± 0.032	$0.011^{+0.021}_{-0.011}$	$0.47^{+0.89}_{-0.47}$
Base 1	$67.94^{+0.97}_{-0.92}$	—	0.030 ± 0.010	0.127 ± 0.010	$-19.426^{+0.026}_{-0.027}$	$0.092^{+0.075}_{-0.066}$	$3.62^{+2.95}_{-2.60}$
Base 1 + CC	68.0 ± 0.9	—	$0.029^{+0.010}_{-0.009}$	0.127 ± 0.010	$-19.425^{+0.025}_{-0.026}$	$0.088^{+0.075}_{-0.063}$	$3.46^{+2.95}_{-2.48}$
Base 1 + CC + R22	$69.92^{+0.71}_{-0.74}$	—	0.027 ± 0.010	0.125 ± 0.010	$-19.373^{+0.019}_{-0.020}$	$0.082^{+0.073}_{-0.061}$	$3.32^{+2.95}_{-2.47}$
Base 2	$70.39^{+0.75}_{-0.73}$	—	0.027 ± 0.010	0.125 ± 0.010	-19.357 ± 0.020	$0.088^{+0.072}_{-0.063}$	$3.59^{+2.93}_{-2.57}$
Base 2 + CC	$70.30^{+0.73}_{-0.72}$	—	0.027 ± 0.010	0.125 ± 0.010	$-19.360^{+0.020}_{-0.019}$	$0.085^{+0.070}_{-0.061}$	$3.46^{+2.85}_{-2.48}$
Base 2 + CC + R22	$71.05^{+0.62}_{-0.60}$	—	0.026 ± 0.010	0.124 ± 0.010	-19.340 ± 0.016	$0.081^{+0.071}_{-0.058}$	$3.33^{+2.92}_{-2.38}$
Base 3	69.53 ± 0.56	—	0.021 ± 0.002	$0.124^{+0.009}_{-0.007}$	$-19.379^{+0.016}_{-0.017}$	$0.030^{+0.038}_{-0.026}$	$1.21^{+1.53}_{-1.05}$
Base 3 + CC	$69.52^{+0.54}_{-0.57}$	—	0.021 ± 0.002	$0.124^{+0.009}_{-0.007}$	-19.379 ± 0.016	$0.030^{+0.036}_{-0.026}$	$1.21^{+1.45}_{-1.05}$
Base 3 + CC + R22	$70.17^{+0.49}_{-0.51}$	—	0.022 ± 0.002	$0.122^{+0.009}_{-0.007}$	$-19.361^{+0.014}_{-0.015}$	$0.026^{+0.035}_{-0.023}$	$1.06^{+1.42}_{-0.93}$
ΛvCDM1 + Ω_K							
PPS	73.3 ± 1.2	$0.196^{+0.092}_{-0.090}$	0.026 ± 0.011	0.124 ± 0.011	$-19.247^{+0.033}_{-0.034}$	$0.048^{+0.084}_{-0.047}$	$2.04^{+3.56}_{-1.99}$
PPS + DESI	73.3 ± 1.1	$0.062^{+0.037}_{-0.035}$	0.031 ± 0.003	0.129 ± 0.009	$-19.255^{+0.032}_{-0.033}$	$0.019^{+0.029}_{-0.019}$	$0.81^{+1.23}_{-0.81}$
Base 1	$66.1^{+1.2}_{-1.1}$	$0.181^{+0.073}_{-0.074}$	0.023 ± 0.011	0.121 ± 0.011	$-19.470^{+0.032}_{-0.030}$	$0.195^{+0.094}_{-0.095}$	$7.46^{+3.60}_{-3.64}$
Base 1 + CC	66.3 ± 1.1	$0.174^{+0.074}_{-0.070}$	0.023 ± 0.011	0.121 ± 0.011	$-19.466^{+0.030}_{-0.029}$	$0.188^{+0.091}_{-0.094}$	$7.20^{+3.49}_{-3.60}$
Base 1 + CC + R22	$69.56^{+0.81}_{-0.83}$	$0.049^{+0.059}_{-0.058}$	0.025 ± 0.011	0.123 ± 0.011	$-19.381^{+0.021}_{-0.022}$	$0.109^{+0.081}_{-0.074}$	$4.39^{+3.26}_{-2.98}$
Base 2	$70.09^{+0.87}_{-0.90}$	0.040 ± 0.061	0.025 ± 0.011	0.124 ± 0.011	$-19.365^{+0.023}_{-0.022}$	$0.111^{+0.082}_{-0.075}$	$4.50^{+3.33}_{-3.04}$
Base 2 + CC	$70.00^{+0.84}_{-0.85}$	0.025 ± 0.011	0.025 ± 0.011	0.123 ± 0.011	$-19.366^{+0.021}_{-0.022}$	$0.105^{+0.080}_{-0.072}$	$4.25^{+3.24}_{-2.91}$
Base 2 + CC + R22	71.06 ± 0.70	$-0.002^{+0.056}_{-0.053}$	0.026 ± 0.011	0.125 ± 0.011	-19.341 ± 0.018	$0.078^{+0.077}_{-0.059}$	$3.16^{+3.17}_{-2.43}$
Base 3	$69.42^{+0.68}_{-0.67}$	0.009 ± 0.032	0.021 ± 0.002	0.124 ± 0.009	$-19.381^{+0.018}_{-0.019}$	$0.033^{+0.040}_{-0.028}$	$1.33^{+1.61}_{-1.12}$
Base 3 + CC	$69.38^{+0.67}_{-0.65}$	$0.009^{+0.032}_{-0.031}$	0.021 ± 0.002	0.124 ± 0.009	-19.382 ± 0.018	$0.032^{+0.040}_{-0.028}$	$1.29^{+1.61}_{-1.12}$
Base 3 + CC + R22	$70.28^{+0.60}_{-0.58}$	$-0.014^{+0.030}_{-0.029}$	$0.0219^{+0.0018}_{-0.0019}$	$0.126^{+0.009}_{-0.008}$	-19.358 ± 0.016	$0.024^{+0.034}_{-0.024}$	$0.98^{+1.38}_{-0.98}$

Tabla 7.6.2: Resumen de las distribuciones posteriores marginalizadas para los parámetros cosmológicos de los escenarios Λ vCDM2 y Λ vCDM2 + Ω_K , correspondientes al caso al caso m libre, para distintos conjuntos de datos observacionales. Se presentan el MAP y los intervalos de credibilidad al 68 % para cada parámetro. El parámetro de viscosidad ζ_0 se calcula mediante la Ec. (4.1.11). Las unidades utilizadas son H_0 en $\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ y ζ_0 en Pa s .

Datos	H_0	$\Omega_{K,0}$	$\Omega_{b,0}h^2$	$\Omega_{\text{vc},0}h^2$	M	m	ζ_0	ζ_0 ($\times 10^6$)
Λ vCDM2								
PPS	73.1 ± 1.1	—	$0.036^{+0.010}_{-0.009}$	$0.135^{+0.009}_{-0.010}$	$-19.264^{+0.032}_{-0.034}$	$-1.11^{+1.39}_{-0.82}$	$0.020^{+0.040}_{-0.019}$	$0.85^{+1.69}_{-0.80}$
PPS + DESI	73.4 ± 1.1	—	0.028 ± 0.002	0.136 ± 0.006	-19.261 ± 0.031	$-1.25^{+1.38}_{-0.63}$	$0.012^{+0.026}_{-0.011}$	$0.51^{+1.10}_{-0.47}$
Base 1	$67.3^{+1.1}_{-1.0}$	—	0.022 ± 0.011	$0.127^{+0.010}_{-0.010}$	-19.439 ± 0.028	$0.89^{+0.61}_{-0.60}$	$0.032^{+0.050}_{-0.030}$	$1.25^{+1.95}_{-1.17}$
Base 1 + CC	67.4 ± 1.0	—	0.030 ± 0.010	0.127 ± 0.010	$-19.437^{+0.027}_{-0.028}$	$0.91^{+0.63}_{-0.59}$	$0.030^{+0.048}_{-0.029}$	$1.17^{+1.87}_{-1.13}$
Base 1 + CC + R22	$69.76^{+0.78}_{-0.79}$	—	0.025 ± 0.010	0.123 ± 0.010	-19.376 ± 0.021	$0.51^{+0.86}_{-1.03}$	$0.040^{+0.064}_{-0.039}$	$1.61^{+2.58}_{-1.57}$
Base 2	$70.19^{+0.82}_{-0.80}$	—	$0.025^{+0.011}_{-0.010}$	0.124 ± 0.010	-19.361 ± 0.021	$0.50^{+0.83}_{-0.93}$	$0.043^{+0.064}_{-0.042}$	$1.75^{+2.60}_{-1.71}$
Base 2 + CC	$70.13^{+0.82}_{-0.80}$	—	0.024 ± 0.010	0.122 ± 0.010	-19.363 ± 0.021	$0.51^{+0.85}_{-0.98}$	$0.042^{+0.061}_{-0.041}$	$1.70^{+2.48}_{-1.66}$
Base 2 + CC + R22	$71.00^{+0.67}_{-0.66}$	—	0.024 ± 0.010	$0.122^{+0.010}_{-0.009}$	-19.342 ± 0.017	$0.23^{+0.83}_{-1.18}$	$0.048^{+0.070}_{-0.047}$	$1.97^{+2.88}_{-1.93}$
Base 3	$69.61^{+0.63}_{-0.62}$	—	0.022 ± 0.002	$0.122^{+0.008}_{-0.006}$	$-19.378^{+0.018}_{-0.017}$	$-0.87^{+1.15}_{-0.84}$	$0.029^{+0.050}_{-0.028}$	$1.17^{+2.01}_{-1.12}$
Base 3 + CC	$69.59^{+0.61}_{-0.60}$	—	$0.022^{+0.001}_{-0.002}$	$0.122^{+0.008}_{-0.006}$	-19.378 ± 0.017	$-0.92^{+1.19}_{-0.80}$	$0.030^{+0.050}_{-0.029}$	$1.21^{+2.01}_{-1.17}$
Base 3 + CC + R22	$70.28^{+0.54}_{-0.52}$	—	0.023 ± 0.002	$0.121^{+0.008}_{-0.006}$	-19.359 ± 0.015	$-1.31^{+1.03}_{-0.62}$	$0.038^{+0.063}_{-0.037}$	$1.55^{+2.56}_{-1.50}$
Λ vCDM2 + Ω_K								
PPS	73.3 ± 1.2	$0.205^{+0.103}_{-0.094}$	0.026 ± 0.011	0.124 ± 0.011	$-19.247^{+0.033}_{-0.034}$	$-1.27^{+1.10}_{-0.72}$	$0.073^{+0.137}_{-0.071}$	$3.10^{+5.81}_{-3.01}$
PPS + DESI	73.4 ± 1.1	$0.062^{+0.040}_{-0.037}$	0.031 ± 0.004	0.129 ± 0.011	$-19.255^{+0.040}_{-0.039}$	$-1.19^{+1.14}_{-0.70}$	$0.032^{+0.065}_{-0.029}$	$1.36^{+2.72}_{-1.23}$
Base 1	66.1 ± 1.3	$0.21^{+0.13}_{-0.12}$	$0.021^{+0.018}_{-0.017}$	$0.119^{+0.016}_{-0.015}$	$-19.474^{+0.037}_{-0.036}$	$-0.41^{+0.95}_{-1.04}$	$0.210^{+0.230}_{-0.180}$	$8.03^{+8.80}_{-6.89}$
Base 1 + CC	66.2 ± 1.2	$0.20^{+0.12}_{-0.11}$	0.021 ± 0.012	0.119 ± 0.012	$-19.470^{+0.034}_{-0.033}$	$-0.45^{+0.95}_{-1.03}$	$0.180^{+0.230}_{-0.160}$	$6.90^{+8.81}_{-6.13}$
Base 1 + CC + R22	$69.58^{+0.90}_{-0.86}$	$0.026^{+0.087}_{-0.082}$	$0.026^{+0.087}_{-0.082}$	$0.122^{+0.012}_{-0.011}$	$-19.380^{+0.023}_{-0.024}$	$0.29^{+0.92}_{-1.31}$	$0.059^{+0.110}_{-0.057}$	$2.38^{+4.43}_{-2.30}$
Base 2	$70.14^{+0.93}_{-0.91}$	$0.007^{+0.079}_{-0.077}$	0.026 ± 0.012	0.124 ± 0.012	$-19.363^{+0.024}_{-0.023}$	$0.47^{+0.91}_{-1.06}$	$0.049^{+0.089}_{-0.047}$	$1.99^{+3.61}_{-1.91}$
Base 2 + CC	$70.07^{+0.88}_{-0.90}$	$0.008^{+0.078}_{-0.081}$	0.026 ± 0.012	0.124 ± 0.012	-19.365 ± 0.023	$0.49^{+0.92}_{-1.14}$	$0.047^{+0.090}_{-0.045}$	$1.91^{+3.65}_{-1.82}$
Base 2 + CC + R22	$71.07^{+0.74}_{-0.73}$	$-0.026^{+0.072}_{-0.074}$	0.027 ± 0.012	0.125 ± 0.012	-19.340 ± 0.019	$0.51^{+0.94}_{-1.21}$	$0.041^{+0.073}_{-0.039}$	$1.69^{+3.00}_{-1.60}$
Base 3	$69.53^{+0.69}_{-0.72}$	$0.008^{+0.037}_{-0.035}$	0.022 ± 0.002	0.122 ± 0.009	-19.380 ± 0.019	$-0.99^{+1.16}_{-0.80}$	$0.036^{+0.063}_{-0.034}$	$1.45^{+2.34}_{-1.37}$
Base 3 + CC	$69.49^{+0.68}_{-0.69}$	$0.010^{+0.036}_{-0.035}$	0.022 ± 0.002	$0.122^{+0.009}_{-0.008}$	-19.380 ± 0.019	$-1.01^{+1.14}_{-0.78}$	$0.037^{+0.065}_{-0.035}$	$1.49^{+2.61}_{-1.41}$
Base 3 + CC + R22	$70.36^{+0.58}_{-0.57}$	-0.009 ± 0.032	0.022 ± 0.002	0.124 ± 0.008	-19.358 ± 0.016	$-1.31^{+1.09}_{-0.62}$	$0.032^{+0.067}_{-0.030}$	$1.30^{+2.73}_{-1.22}$

Tabla 7.6.3: Resumen de las distribuciones posteriores marginalizadas y de la comparación entre el modelo Λ CDM y Λ CDM + Ω_K al 68 %. Las unidades de H_0 están expresadas en $\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$.

Datos	Λ CDM ($\tilde{\zeta}_0 = 0$)											
	H_0	$\Omega_{K,0}$	M	χ^2_{min}	AIC $_{\Lambda\text{CDM}}$	Δ AIC	BIC $_{\Lambda\text{CDM}}$	Δ BIC	DIC $_{\Lambda\text{CDM}}$	Δ DIC	$\ln \xi_0$	$\ln \mathcal{B}_{0i}$
PPS	73.2 ± 1.1	-	$-19.262^{+0.032}_{-0.031}$	1452.03	1460.03	0	1481.68	0	1458.81	0	-4.49	0
PPS + DESI	$73.4^{+1.1}_{-1.0}$	-	$-19.257^{+0.030}_{-0.032}$	1465.68	1473.68	0	1495.36	0	1473.60	0	-5.26	0
Base 1	$67.97^{+0.94}_{-0.91}$	-	-19.426 ± 0.026	1427.36	1435.36	0	1456.92	0	1433.04	0	-4.62	0
Base 1 + CC	$68.05^{+0.89}_{-0.90}$	-	-19.424 ± 0.025	1442.53	1450.53	0	1472.17	0	1448.60	0	-4.72	0
Base 1 + CC + R22	$69.94^{+0.69}_{-0.72}$	-	$-19.373^{+0.019}_{-0.020}$	1456.75	1464.75	0	1486.39	0	1462.85	0	-4.99	0
Base 2	$70.41^{+0.72}_{-0.71}$	-	$-19.358^{+0.020}_{-0.019}$	1498.52	1506.52	0	1528.24	0	1504.38	0	-4.94	0
Base 2 + CC	$70.32^{+0.71}_{-0.70}$	-	-19.360 ± 0.019	1513.98	1521.98	0	1543.78	0	1519.83	0	-5.00	0
Base 2 + CC + R22	$71.08^{+0.60}_{-0.61}$	-	-19.340 ± 0.016	1518.76	1526.76	0	1548.56	0	1524.46	0	-5.14	0
Base 3	$69.58^{+0.56}_{-0.54}$	-	-19.377 ± 0.016	1513.14	1521.14	0	1542.89	0	1521.01	0	-6.23	0
Base 3 + CC	$69.58^{+0.54}_{-0.55}$	-	-19.378 ± 0.016	1528.09	1536.09	0	1557.92	0	1535.94	0	-6.31	0
Base 3 + CC + R22	$70.20^{+0.49}_{-0.48}$	-	-19.360 ± 0.014	1537.17	1545.17	0	1567.00	0	1545.04	0	-6.34	0
Datasets	Λ CDM + Ω_K ($\tilde{\zeta}_0 = 0$)											
	H_0	$\Omega_{K,0}$	M	χ^2_{min}	AIC $_i$	Δ AIC	BIC $_i$	Δ BIC	DIC $_i$	Δ DIC	$\ln \xi_i$	$\ln \mathcal{B}_{0i}$
PPS	73.4 ± 1.1	$0.147^{+0.077}_{-0.078}$	$-19.245^{+0.034}_{-0.033}$	1451.73	1461.73	-1.7	1488.79	-7.11	1458.45	0.36	-7.32	2.83
PPS + DESI	73.5 ± 1.1	$0.052^{+0.033}_{-0.034}$	$-19.251^{+0.031}_{-0.033}$	1463.99	1473.99	-0.31	1501.09	-5.73	1473.00	0.60	-9.87	4.61
Base 1	66.7 ± 1.1	$0.120^{+0.068}_{-0.065}$	$-19.457^{+0.030}_{-0.031}$	1418.54	1428.54	6.82	1455.49	1.43	1427.47	5.57	-7.69	3.07
Base 1 + CC	66.8 ± 1.1	$0.118^{+0.067}_{-0.066}$	$-19.454^{+0.030}_{-0.029}$	1434.05	1444.05	6.48	1471.10	1.07	1442.77	5.83	-7.72	3.00
Base 1 + CC + R22	$69.78^{+0.84}_{-0.79}$	$0.017^{+0.053}_{-0.055}$	$-19.376^{+0.022}_{-0.021}$	1456.07	1466.07	-1.32	1493.12	-6.73	1463.49	-0.64	-7.92	2.93
Base 2	$70.37^{+0.83}_{-0.86}$	0.004 ± 0.055	-19.359 ± 0.022	1498.16	1508.16	-1.64	1535.32	-7.08	1505.59	-1.21	-7.83	2.89
Base 2 + CC	$70.28^{+0.82}_{-0.83}$	$0.006^{+0.054}_{-0.055}$	-19.361 ± 0.021	1513.65	1523.65	-1.68	1550.90	-7.12	1521.02	-1.19	-7.91	2.91
Base 2 + CC + R22	$71.22^{+0.68}_{-0.67}$	$-0.027^{+0.051}_{-0.050}$	$-19.338^{+0.018}_{-0.017}$	1518.73	1528.73	-1.98	1555.99	-7.43	1525.97	-1.51	-8.01	2.87
Base 3	$69.60^{+0.67}_{-0.64}$	-0.002 ± 0.030	-19.377 ± 0.018	1513.19	1523.19	-2.05	1550.38	-7.49	1522.53	-1.52	-11.04	4.81
Base 3 + CC	69.59 ± 0.64	$-0.001^{+0.029}_{-0.030}$	$-19.378^{+0.018}_{-0.017}$	1528.12	1538.12	-2.03	1565.41	-7.49	1537.46	-1.52	-11.14	4.83
Base 3 + CC + R22	$70.39^{+0.57}_{-0.54}$	-0.021 ± 0.028	$-19.357^{+0.016}_{-0.015}$	1536.70	1546.70	-1.53	1573.99	-6.99	1545.99	-0.95	-11.21	4.87

Nota. Se muestran los criterios de información $\Delta\text{IC} = \text{IC}_{\Lambda\text{CDM}} - \text{IC}_{\Lambda\text{CDM}+\Omega_K}$, donde $\Delta\text{IC} > 2$ indica preferencia por el modelo con curvatura; así como la evidencia bayesiana a través de $\ln \mathcal{B}_{0i} = \ln \mathcal{E}_{\Lambda\text{CDM}} - \ln \mathcal{E}_{\Lambda\text{CDM}+\Omega_K}$, donde $\ln \mathcal{B}_{0i} > 1$ favorece al modelo Λ CDM.

Tabla 7.6.4: Comparación entre los modelos cosmológicos con viscosidad constante ($m = 0$) en el formalismo de Eckart y el modelo estándar Λ CDM.

Datos	$\chi^2_{\min,i}$	$\Delta\chi^2_{\min}$	AIC _i	Δ AIC	BIC _i	Δ BIC	DIC _i	Δ DIC	$\ln \mathcal{E}_i$	$\ln \mathcal{B}_{0i}$
ΛvCDM1										
PPS	1451.96	0.07	1461.96	-1.93	1489.02	-7.34	1459.41	-0.6	-6.28	1.79
PPS + DESI	1464.63	1.05	1474.63	-0.95	1501.74	-6.38	1473.58	0.02	-7.67	2.41
Base 1	1420.81	6.55	1430.81	4.55	1457.76	-0.84	1430.52	2.52	-5.95	1.33
Base 1 + CC	1435.77	6.76	1445.77	4.76	1472.82	-0.65	1445.29	3.31	-5.98	1.26
Base 1 + CC + R22	1453.00	3.75	1463.00	1.75	1490.05	-3.66	1461.14	1.71	-6.17	1.18
Base 2	1494.40	4.12	1506.52	2.12	1531.55	-3.31	1502.40	1.98	-6.34	1.40
Base 2 + CC	1510.30	3.68	1520.30	1.68	1547.55	-3.77	1517.84	1.99	-6.31	1.31
Base 2 + CC + R22	1516.14	2.62	1526.14	0.62	1553.39	-4.83	1522.84	1.62	-6.51	1.37
Base 3	1511.96	1.18	1521.96	-0.82	1549.15	-6.26	1520.51	0.50	-8.29	2.06
Base 3 + CC	1526.91	1.18	1536.91	-0.82	1564.20	-6.28	1535.48	0.46	-8.26	1.95
Base 3 + CC + R22	1537.12	0.05	1547.12	-1.95	1574.42	-7.42	1545.06	-0.02	-8.55	2.21
ΛvCDM1 + Ω_K										
PPS	1451.72	0.31	1463.72	-3.69	1496.20	-14.52	1459.62	-0.81	-8.77	4.28
PPS + DESI	1463.20	2.48	1475.20	-1.52	1507.72	-12.36	1473.45	0.15	-12.21	6.95
Base 1	1417.36	10.00	1429.36	6.00	1461.70	-4.78	1425.68	7.36	-8.87	4.25
Base 1 + CC	1433.17	9.36	1445.17	5.36	1477.63	-5.46	1441.32	7.28	-8.93	4.21
Base 1 + CC + R22	1453.65	3.10	1465.65	-0.90	1498.12	-11.73	1462.22	0.63	-9.27	4.28
Base 2	1494.81	3.71	1506.81	-0.29	1539.39	-11.15	1503.93	0.45	-9.29	4.35
Base 2 + CC	1510.80	3.18	1522.80	-0.82	1555.50	-11.72	1519.07	0.76	-9.20	4.20
Base 2 + CC + R22	1515.16	3.60	1527.16	-0.40	1559.87	-11.31	1524.37	0.09	-9.54	4.40
Base 3	1512.06	1.08	1524.06	-2.92	1556.69	-13.80	1522.36	-1.35	-13.34	7.11
Base 3 + CC	1526.91	1.18	1538.91	-2.82	1571.66	-13.74	1537.29	-1.35	-13.36	7.05
Base 3 + CC + R22	1536.15	1.02	1548.15	-2.98	1580.90	-13.90	1546.22	-1.18	-13.52	7.18

Nota. Se utilizan criterios de información (DIC, BIC y AIC), la evidencia bayesiana ($\ln \mathcal{E}$) y el factor de Bayes ($\ln \mathcal{B}_{0i}$). Todas las cantidades Δ se calculan respecto al modelo estándar Λ CDM para la misma combinación de datos. En particular, $\Delta\chi^2_{\min} = \chi^2_{\min,\Lambda\text{CDM}} - \chi^2_{\min,i}$, $\Delta\text{IC} = \text{IC}_{\Lambda\text{CDM}} - \text{IC}_i$ y $\ln \mathcal{B}_{0i} = \ln \mathcal{E}_{\Lambda\text{CDM}} - \ln \mathcal{E}_i$. Valores de $\Delta\text{IC} > 2$ indican preferencia por el modelo viscoso, mientras que $\ln \mathcal{B}_{0i} > 1$ favorece al modelo Λ CDM.

Tabla 7.6.5: Comparación entre los modelos cosmológicos viscosos con m libre en el formalismo de Eckart y el modelo estándar Λ CDM.

Datos	$\chi^2_{\min,i}$	$\Delta\chi^2_{\min}$	AIC _i	Δ AIC	BIC _i	Δ BIC	DIC _i	Δ DIC	$\ln \mathcal{E}_i$	$\ln \mathcal{B}_{0i}$
ΛvCDM2										
PPS	1451.78	0.25	1463.78	-3.75	1496.26	-14.58	1459.43	-0.62	-5.01	0.52
PPS + DESI	1463.19	2.49	1475.19	-1.51	1507.71	-12.35	1473.82	-0.22	-6.08	0.82
Base 1	1416.83	10.43	1428.83	6.53	1461.17	-4.25	1426.09	6.95	-5.60	0.98
Base 1 + CC	1431.90	10.63	1443.90	6.63	1476.36	-4.19	1440.63	7.97	-5.57	0.85
Base 1 + CC + R22	1451.68	5.07	1463.68	1.07	1496.15	-9.76	1459.87	2.98	-5.48	0.49
Base 2	1493.43	5.09	1505.43	1.09	1538.01	-9.77	1502.09	2.29	-5.52	0.58
Base 2 + CC	1509.09	4.89	1521.09	0.89	1553.79	-10.01	1517.09	2.74	-5.60	0.60
Base 2 + CC + R22	1515.76	3.00	1527.76	-1.00	1560.46	-11.90	1523.25	1.21	-5.53	0.39
Base 3	1511.89	1.25	1523.88	-2.74	1556.51	-13.62	1521.07	-0.06	-6.94	0.71
Base 3 + CC	1527.00	1.09	1539.00	-2.91	1571.75	-13.83	1535.96	-1.85	-7.16	0.85
Base 3 + CC + R22	1537.18	-0.01	1549.17	-4.00	1581.93	-14.93	1545.36	-0.32	-7.07	0.73
ΛvCDM2 + Ω_K										
PPS	1451.76	0.27	1465.76	-5.73	1503.65	-21.97	1459.41	-0.60	-7.49	3.00
PPS + DESI	1562.96	2.72	1476.96	-3.28	1514.91	-19.55	-	-	-7.74	2.48
Base 1	1416.83	10.53	1430.83	4.53	1468.56	-11.64	1425.35	7.69	-7.74	3.12
Base 1 + CC	1431.98	10.55	1445.98	4.55	1483.86	-11.69	1441.21	7.39	-7.72	3.00
Base 1 + CC + R22	1448.63	8.12	1462.63	2.12	1500.51	-14.12	1460.85	2.00	-8.13	3.14
Base 2	1489.50	9.02	1503.50	3.02	1541.52	-13.28	1488.85	15.53	-8.23	3.29
Base 2 + CC	1504.71	9.27	1518.71	3.27	1556.86	-13.08	1518.12	1.71	-8.21	3.21
Base 2 + CC + R22	1508.26	10.50	1522.26	4.50	1560.42	-11.86	1526.61	-2.15	-8.31	3.17
Base 3	1511.75	1.39	1525.75	-4.61	1563.82	-20.93	1522.81	-1.80	-11.78	5.55
Base 3 + CC	1526.52	1.57	1540.52	-4.43	1578.72	-20.80	1537.79	-1.85	-11.94	5.63
Base 3 + CC + R22	1535.44	1.73	1549.44	-4.27	1587.64	-20.64	1546.38	-1.34	-11.89	5.55

Nota. Todas las cantidades Δ se calculan respecto al modelo estándar Λ CDM para la misma combinación de datos. En particular, $\Delta\chi^2_{\min} = \chi^2_{\min,\Lambda\text{CDM}} - \chi^2_{\min,i}$, $\Delta\text{IC} = \text{IC}_{\Lambda\text{CDM}} - \text{IC}_i$ y $\ln \mathcal{B}_{0i} = \ln \mathcal{E}_{\Lambda\text{CDM}} - \ln \mathcal{E}_i$. Valores de $\Delta\text{IC} > 2$ indican preferencia por el modelo viscoso, mientras que $\ln \mathcal{B}_{0i} > 1$ favorece al modelo Λ CDM.

Capítulo 8

Resultados y análisis de modelos $w(z)$ VCDM en la teoría de Eckart

En este capítulo se presentan y analizan los valores inferidos de los parámetros cosmológicos en modelos con viscosidad de volumen en el formalismo de Eckart, considerando tanto un parámetro de ecuación de estado constante como una parametrización dinámica para la energía oscura. La inferencia se realiza a partir de distintas combinaciones de datos observacionales. Los modelos se construyen a partir del *ansatz* definido en la Ec. (4.1.10), los cuales se resumen en la Sección 4.1.2 y en la Tabla 4.1.1.

En primer lugar, se estudian los modelos con w constante, tratado como parámetro libre, correspondientes a w VCDM1 y w VCDM2, junto con sus extensiones que incorporan curvatura espacial: w VCDM1 + Ω_K y w VCDM2 + Ω_K . Posteriormente, se analizan los modelos con parametrización CPL, denominados w_0w_a vCDM1 y w_0w_a VCDM2, así como sus versiones con curvatura. En cada caso, se infieren los parámetros cosmológicos y se evalúa su desempeño comparativo frente al modelo estándar Λ CDM. Asimismo, se presentan a modo de referencia los resultados en el caso $\tilde{\zeta}_0 = 0$, equivalente a los escenarios w CDM, w_0w_a CDM y Λ CDM, sin desarrollar un análisis específico de estos escenarios (véase Tablas 8.5.7 y 8.5.8).

La inferencia de los parámetros se realiza mediante un análisis bayesiano basado en el muestreador MCMC invariante bajo transformaciones afines, implementado en el paquete de Python `emcee` (Foreman-Mackey et al., 2013), tal como en el Cap. 7. Para los modelos w VCDM, se emplean 80 caminantes y 40000 pasos por caminante, mientras que en los modelos w_0w_a VCDM se utilizan 5000 caminantes y 1000 pasos por caminante; la misma configuración se adopta en los modelos de referencia w CDM, w_0w_a CDM y Λ CDM. Este incremento en el número de caminantes permite una exploración más eficiente del espacio de parámetros en los escenarios con parametrización CPL, favoreciendo la convergencia de las cadenas y la obtención de muestras menos correlacionadas.

Tabla 8.0.1: Parámetros libres de los modelos analizados y las distribuciones previas adoptadas.

Modelos	Espacio de parámetros
$m = 0$	w VCDM1 $\Theta = \{H_0, \Omega_{b,0}h^2, \Omega_{vc,0}h^2, w_0, r_d, M, \tilde{\zeta}_0\}$
	w VCDM1 + Ω_K $\Theta = \{H_0, \Omega_{K,0}, \Omega_{b,0}h^2, \Omega_{vc,0}h^2, w_0, r_d, M, \tilde{\zeta}_0\}$
	w_0w_a VCDM1 $\Theta = \{H_0, \Omega_{b,0}h^2, \Omega_{vc,0}h^2, w_0, w_a, r_d, M, \tilde{\zeta}_0\}$
	w_0w_a VCDM1 + Ω_K $\Theta = \{H_0, \Omega_{K,0}, \Omega_{b,0}h^2, \Omega_{vc,0}h^2, w_0, w_a, r_d, M, \tilde{\zeta}_0\}$
m libre	w VCDM2 $\Theta = \{H_0, \Omega_{b,0}h^2, \Omega_{vc,0}h^2, w_0, r_d, M, m, \tilde{\zeta}_0\}$
	w VCDM2 + Ω_K $\Theta = \{H_0, \Omega_{K,0}, \Omega_{b,0}h^2, \Omega_{vc,0}h^2, w_0, r_d, M, m, \tilde{\zeta}_0\}$
	w_0w_a VCDM2 $\Theta = \{H_0, \Omega_{b,0}h^2, \Omega_{vc,0}h^2, w_0, w_a, r_d, M, m, \tilde{\zeta}_0\}$
	w_0w_a VCDM2 + Ω_K $\Theta = \{H_0, \Omega_{K,0}, \Omega_{b,0}h^2, \Omega_{vc,0}h^2, w_0, w_a, r_d, M, m, \tilde{\zeta}_0\}$
$\tilde{\zeta}_0 = 0$	w CDM $\Theta = \{H_0, \Omega_{b,0}h^2, \Omega_{c,0}h^2, w_0, r_d, M\}$
	w CDM + Ω_K $\Theta = \{H_0, \Omega_{K,0}, \Omega_{b,0}h^2, \Omega_{c,0}h^2, w_0, r_d, M\}$
	w_0w_a CDM $\Theta = \{H_0, \Omega_{b,0}h^2, \Omega_{c,0}h^2, w_0, w_a, r_d, M\}$
	w_0w_a CDM + Ω_K $\Theta = \{H_0, \Omega_{K,0}, \Omega_{b,0}h^2, \Omega_{c,0}h^2, w_0, w_a, r_d, M\}$
	Λ CDM $\Theta = \{H_0, \Omega_{b,0}h^2, \Omega_{c,0}h^2, r_d, M\}$
Distribuciones previas	
$\pi(H_0): \mathcal{U}(30, 99); \quad \pi(\Omega_{K,0}): \mathcal{U}(-0.4, 0.4) \quad \pi(M): \mathcal{U}(-30, -5);$	
$\pi(w_0): \mathcal{U}(-2, 1); \quad \pi(w_a): \mathcal{U}(-2, 1); \quad \pi(r_d): \mathcal{U}(100, 200);$	
$\pi(\tilde{\zeta}_0): \mathcal{U}(0, 1); \quad \pi(m): \mathcal{U}(-2, 2); \quad \pi(\Omega_{b,0}h^2): \mathcal{N}(0.022, 0.01);$	
$\pi(\Omega_{vc,0}h^2): \mathcal{N}(0.12, 0.01); \quad \pi(\Omega_{c,0}h^2): \mathcal{N}(0.12, 0.01).$	

La convergencia se evalúa descartando una fase inicial de la cadena equivalente a 10 veces el mayor tiempo de autocorrelación entre los parámetros. La verosimilitud incorpora los conjuntos de datos PP, PPS y DESI, implementados a partir de la versión pública CosmoSIS¹ (Zuntz et al., 2015). Las distribuciones posteriores marginalizadas de los parámetros, junto con sus contornos de credibilidad, se obtienen a partir de las cadenas MCMC utilizando el paquete ChainConsumer (Hinton, 2016). En el muestreo MCMC se adoptan distribuciones previas uniformes, $\mathcal{U}(a, b)$, y gaussianas, $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Los intervalos específicos asociados a cada parámetro libre se presentan en la Tabla 8.0.1 y se mantienen fijos a lo largo de todo el análisis.

¹<https://cosmosis.readthedocs.io/en/latest/>

Se presenta el análisis observacional utilizando distintos conjuntos de datos cosmológicos con el propósito de restringir los parámetros de los modelos y evaluar su consistencia con las observaciones actuales. El conjunto de datos incluye CC, mediciones de BAO (HBAO y DESI), SNe Ia (PP y PPS), y R22. Se definen tres combinaciones específicas de datos: **Base 2 (HBAO + PPS)**, **Base 3 (HBAO + PPS + DESI)** y **Base 4 (HBAO + PP + DESI)**, cuyas funciones χ^2 conjuntas están dadas por

$$\begin{aligned}\chi_{\text{Base2}}^2 &= \chi_{\text{HBAO}}^2 + \chi_{\text{PPS}}^2, \\ \chi_{\text{Base3}}^2 &= \chi_{\text{HBAO}}^2 + \chi_{\text{PPS}}^2 + \chi_{\text{DESI}}^2, \\ \chi_{\text{Base4}}^2 &= \chi_{\text{HBAO}}^2 + \chi_{\text{PP}}^2 + \chi_{\text{DESI}}^2.\end{aligned}\tag{8.0.1}$$

También se estudian las restricciones conjuntas obtenidas al incorporar CC y R22 a cada una de las combinaciones base, dando lugar a los conjuntos: Base 2 + CC + R22, Base 3 + CC + R22 y Base 4 + CC + R22.

8.1. Modelos w VCDM

En esta sección se presentan los resultados obtenidos para los modelos con parámetro de ecuación de estado w libre. En las Tablas 8.5.1 y 8.5.2 se presentan los valores MAP y los intervalos de credibilidad al 68 % para cada parámetro cosmológico. Adicionalmente, en las Figs 8.1.1 y 8.1.2 se muestran las distribuciones posteriores para el caso de viscosidad constante, mientras que las Figs. 8.1.3 y 8.1.4 se muestran los resultados para el caso general. En ambas figuras se exhiben los contornos bidimensionales al 68 % y 95 % NC, así como las distribuciones posteriores marginalizadas unidimensionales correspondientes a los parámetros libres.

8.1.1. Caso con $m = 0$

Se analiza el escenario con viscosidad constante, donde el término disipativo introduce una corrección uniforme en la evolución cosmológica. Los resultados se resumen en la Tabla 8.5.1, mientras que los contornos correspondientes se presentan en las Figs 8.1.1 y 8.1.2.

En el escenario espacialmente plano, la combinación Base 2 + CC conduce a una estimación del parámetro de Hubble $H_0 = 69.79^{+0.74}_{-0.77} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Al incorporar los datos de DESI, se observa una variación moderada en su estimación ($H_0 = 69.09^{+0.71}_{-0.70} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ para Base 3 + CC). La inclusión de R22 produce un ligero desplazamiento del valor medio de H_0 hacia valores mayores, obteniéndose

$$H_0 = 70.77_{-0.64}^{+0.65} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (\text{Base 2} + \text{CC} + \text{R22}), \quad (8.1.1a)$$

$$H_0 = 70.15_{-0.60}^{+0.59} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (\text{Base 3} + \text{CC} + \text{R22}), \quad (8.1.1b)$$

lo que se traduce en una discrepancia de $\sim 1\sigma$ con los resultados sin R22. Cuando se considera la curvatura espacial, la estimación de H_0 se mantiene estable. Para la misma combinación de datos, se obtiene

$$H_0 = 71.34_{-0.70}^{+0.68} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (\text{Base 2} + \text{CC} + \text{R22}), \quad (8.1.2a)$$

$$H_0 = 70.19_{-0.63}^{+0.60} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (\text{Base 3} + \text{CC} + \text{R22}), \quad (8.1.2b)$$

reproduciendo el mismo desplazamiento moderado observado en el caso plano dentro de 1σ . Como se aprecia en los contornos bidimensionales de la Fig. 8.1.2, esta estabilidad es consistente con una débil correlación negativa entre H_0 y $\Omega_{K,0}$ ($\text{corr} < 0$); por ejemplo, se obtiene $\text{corr} = -0.078$ para Base 3 + CC + R22 y $\text{corr} = -0.104$ para Base 3 + CC.

El parámetro de curvatura $\Omega_{K,0}$ se encuentra débilmente restringido cuando solo se consideran los datos de PPS. En este caso se obtiene $\Omega_{K,0} = -0.20_{-0.16}^{+0.36}$, lo que refleja una fuerte degeneración geométrica con otros parámetros cosmológicos. Esta situación cambia notablemente al incorporar DESI, para el cual se obtiene $\Omega_{K,0} = 0.019 \pm 0.052$ (PPS + DESI). En ambos casos, el resultado permanece compatible con un universo espacialmente plano dentro de 1σ . En particular,

$$\Omega_{K,0} = -0.028 \pm 0.048 \quad (\text{Base 3} + \text{CC}), \quad (8.1.3a)$$

$$\Omega_{K,0} = -0.033 \pm 0.047 \quad (\text{Base 3} + \text{CC} + \text{R22}). \quad (8.1.3b)$$

La inclusión de los datos de DESI también impacta en la estimación del parámetro de la ecuación de estado de la energía oscura w_0 . En el caso espacialmente plano, este es compatible con $w_0 = -1$ dentro de 1σ . Por ejemplo,

$$w_0 = -0.970_{-0.040}^{+0.039} \quad (\text{Base 3} + \text{CC}), \quad (8.1.4a)$$

$$w_0 = -1.006_{-0.037}^{+0.038} \quad (\text{Base 3} + \text{CC} + \text{R22}). \quad (8.1.4b)$$

En ausencia de DESI y permitiendo curvatura espacial, se obtiene $w_0 = -0.798_{-0.060}^{+0.050}$ para Base 2 + CC, lo que corresponde a una desviación de $\sim 3.7\sigma$ respecto a $w_0 = -1$, consistente con

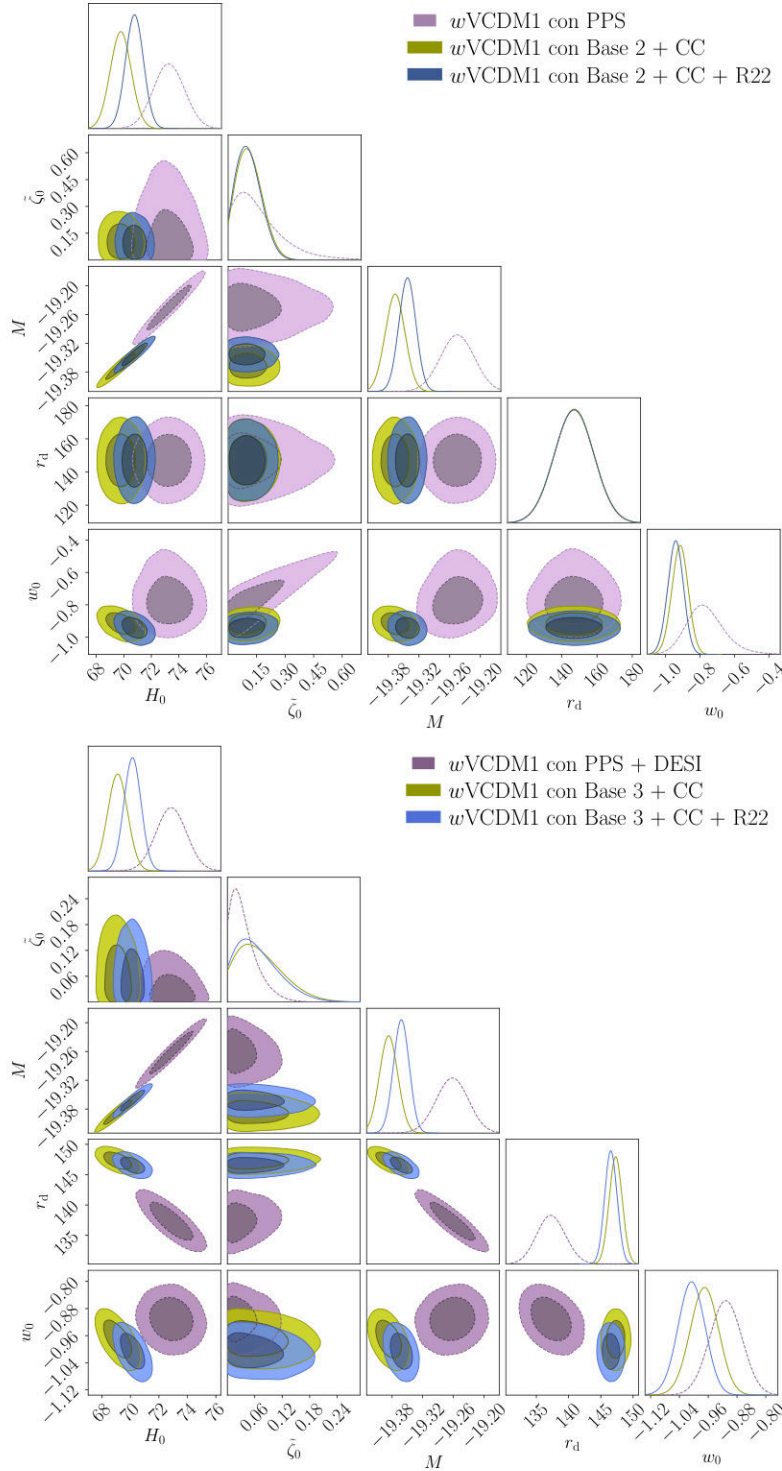


Figura 8.1.1: Distribuciones posteriores de los parámetros cosmológicos para el modelo w VCDM1 con viscosidad constante ($m = 0$). *Panel superior:* conjuntos de datos PPS, Base 2, CC y R22. *Panel inferior:* conjuntos de datos PPS + DESI, Base 3, CC y R22. Los contornos muestran regiones de credibilidad en 2D al 68% y 95%, junto con sus distribuciones posteriores marginalizadas en 1D de cada parámetro.

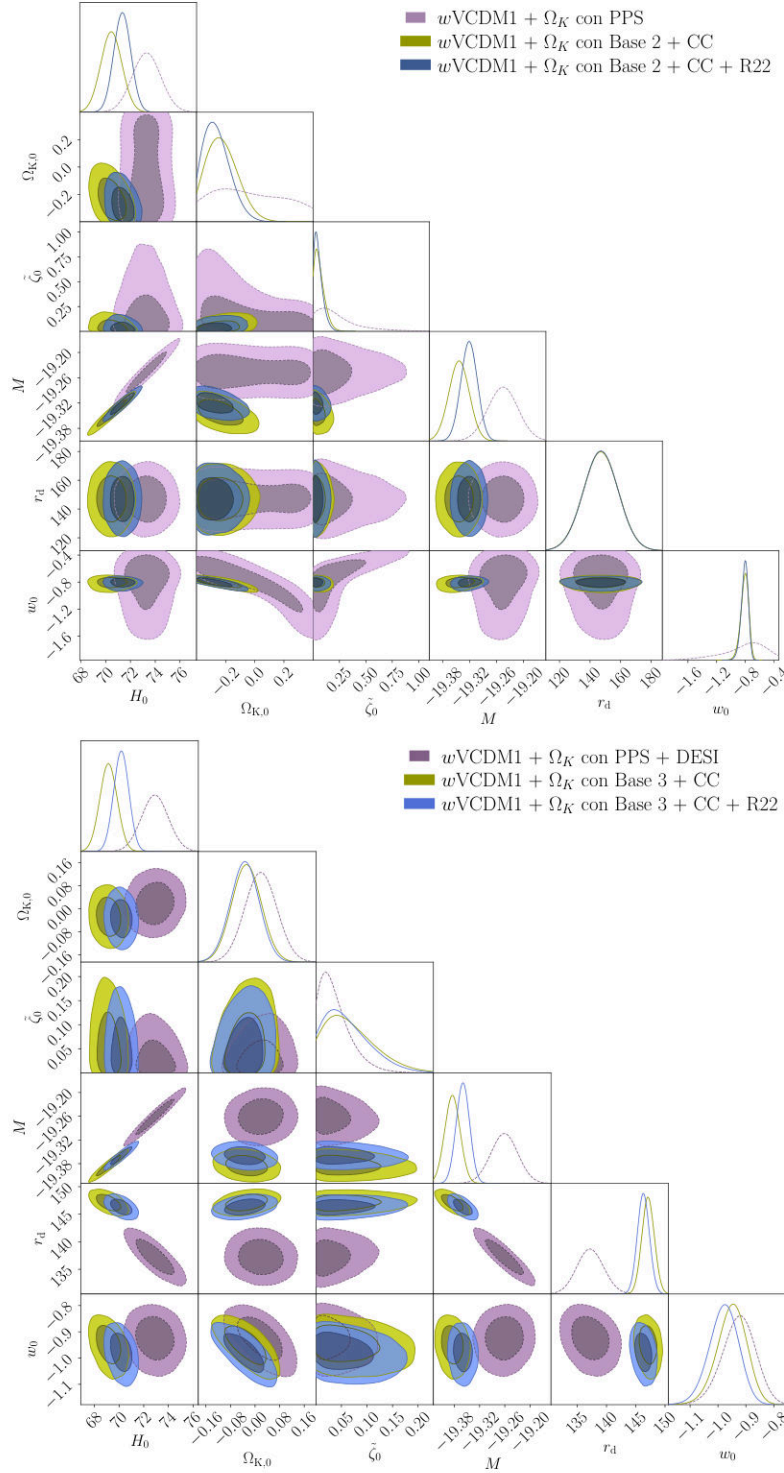


Figura 8.1.2: Distribuciones posteriores de los parámetros cosmológicos para el modelo w VCDM1 + Ω_K con viscosidad constante ($m = 0$). *Panel superior:* conjuntos de datos PPS, Base 2, CC y R22. *Panel inferior:* conjuntos de datos PPS + DESI, Base 3, CC y R22. Los contornos muestran regiones de credibilidad en 2D al 68% y 95%, junto con sus distribuciones posteriores marginalizadas en 1D de cada parámetro.

un escenario de tipo quintaesencia ($-1 < w_0 < -1/3$). Por otro lado, cuando la compilación PPS se considera por sí sola, el parámetro presenta una mayor dispersión, obteniéndose

$$w_0 = -0.787^{+0.112}_{-0.100} \quad (w\text{VCDM1}), \quad (8.1.5a)$$

$$w_0 = -0.690^{+0.250}_{-0.330} \quad (w\text{VCDM1} + \Omega_K), \quad (8.1.5b)$$

con valores MAP igualmente compatibles con un escenario de quintaesencia, pero con desviaciones menores a 2σ respecto a $w_0 = -1$. Además, en los contornos bidimensionales de la Fig. 8.1.2 se observa una correlación negativa entre w_0 y $\Omega_{K,0}$ ($\text{corr} = -0.873$, $w\text{VCDM1} + \Omega_K$ con PPS). Sin embargo, al incorporar los datos DESI, el valor MAP de w_0 se desplaza hacia valores más negativos y la incertidumbre se reduce significativamente; por ejemplo, para la combinación PPS + DESI se obtiene $w_0 = -0.920^{+0.056}_{-0.062}$, lo que indica una desviación de 1.4σ respecto al modelo ΛCDM . Este comportamiento es comparable con resultados recientes reportados por la colaboración DESI (Abdul Karim et al., 2025), donde se obtiene $w_0 = -0.914 \pm 0.040$ utilizando la combinación de datos PP + DESI, con una diferencia de 0.08σ respecto al valor inferido en este trabajo.

El parámetro de viscosidad adimensional $\tilde{\zeta}_0$ se restringe a valores no negativos, en concordancia con la segunda ley de la termodinámica. En este contexto, para el caso espacialmente plano se obtiene $\tilde{\zeta}_0 = 0.097^{+0.072}_{-0.066}$ para Base 2 + CC y $\tilde{\zeta}_0 = 0.045^{+0.062}_{-0.040}$ para Base 3 + CC, siendo compatible con $\tilde{\zeta}_0 = 0$ dentro de 1.5σ , lo que indica que no hay evidencia significativa de viscosidad en la CDM en estos conjuntos de datos. La incorporación de R22 no modifica significativamente estas estimaciones, al igual que la inclusión de curvatura espacial. En contraste, los datos de PPS presentan una incertidumbre considerablemente mayor, obteniéndose $\tilde{\zeta}_0 = 0.10^{+0.19}_{-0.10}$. En este caso, se observa en la Fig. 8.1.1 una correlación positiva entre $\tilde{\zeta}_0$ y w_0 , con $\text{corr} = 0.836$ en el modelo $w\text{VCDM1}$, que se reduce a $\text{corr} = 0.613$ cuando se tiene en cuenta también la curvatura espacial (véase el panel superior de la Fig. 8.1.2).

8.1.2. Caso con m libre

Se analiza el escenario general, en el cual el índice de viscosidad m se deja libre. Los resultados se resumen en la Tabla 8.5.2, mientras que las distribuciones posteriores correspondientes se muestran en las Figs. 8.1.3 y 8.1.4 para los escenarios plano y con curvatura espacial, respectivamente.

Independientemente de la geometría espacial considerada, las estimaciones de H_0 reproducen el mismo comportamiento observado en el caso $m = 0$. Esto indica que la libertad del parámetro

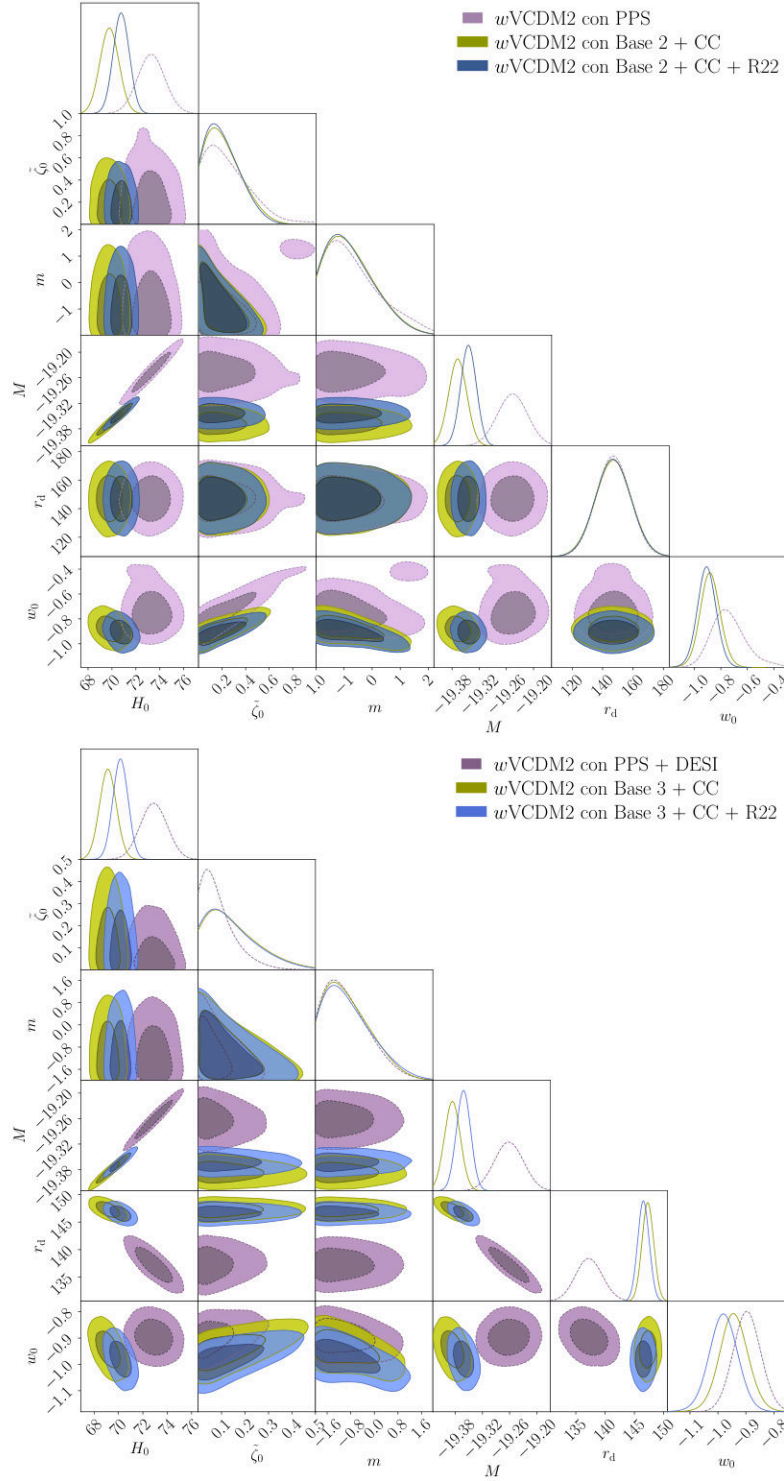


Figura 8.1.3: Distribuciones posteriores de los parámetros cosmológicos para el modelos w VCDM2 con m libre. *Panel superior*: conjuntos de datos PPS, Base 2, CC y R22. *Panel izquierdo*: conjuntos de datos PPS + DESI, Base 3, CC y R22. Los contornos muestran regiones de credibilidad en 2D al 68 % y 95 %, junto con sus distribuciones posteriores marginalizadas en 1D de cada parámetro.

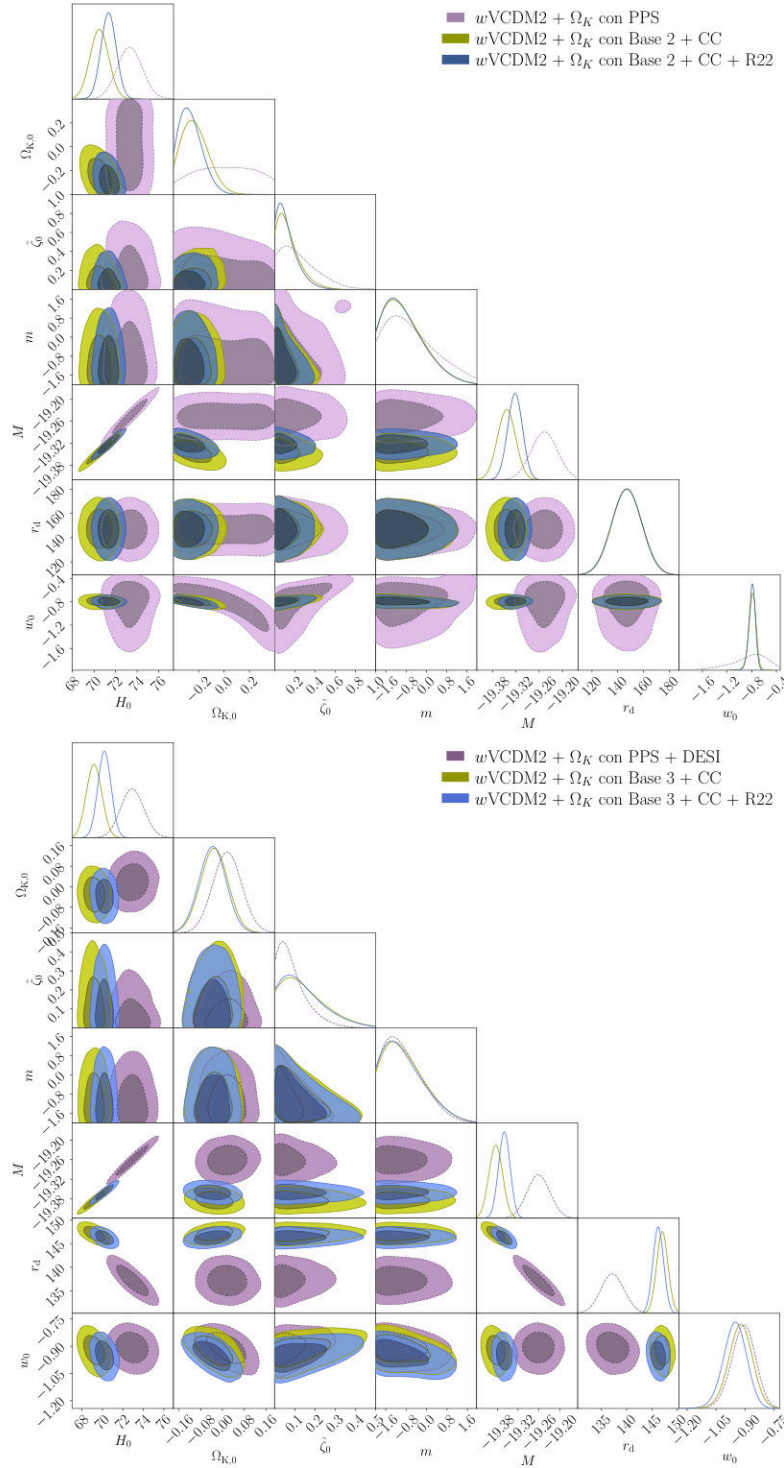


Figura 8.1.4: Distribuciones posteriores de los parámetros cosmológicos para el modelo w VCDM2 + Ω_K con m libre. *Paneles superior*: conjuntos de datos PPS, Base 2, CC y R22. *Panel inferior*: conjuntos de datos PPS + DESI, Base 3, CC y R22. Los contornos muestran regiones de credibilidad en 2D al 68 % y 95 %, junto con sus distribuciones posteriores marginalizadas en 1D de cada parámetro.

m no introduce cambios significativos en la determinación de la tasa de expansión actual. En el modelo espacialmente plano se obtiene

$$H_0 = 70.77_{-0.67}^{+0.68} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (\text{Base 2} + \text{CC} + \text{R22}), \quad (8.1.6a)$$

$$H_0 = 70.17_{-0.63}^{+0.61} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (\text{Base 3} + \text{CC} + \text{R22}), \quad (8.1.6b)$$

mientras que al permitir curvatura espacial, los valores estimados son

$$H_0 = 71.34_{-0.71}^{+0.70} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (\text{Base 2} + \text{CC} + \text{R22}), \quad (8.1.7a)$$

$$H_0 = 70.20_{-0.65}^{+0.64} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (\text{Base 3} + \text{CC} + \text{R22}). \quad (8.1.7b)$$

Al incorporar mediciones de DESI, las estimaciones del parámetro de curvatura $\Omega_{K,0}$ resultan compatibles con la planitud espacial dentro de 1σ , una tendencia que se mantiene en todos los escenarios analizados:

$$\Omega_{K,0} = 0.017_{-0.052}^{+0.053} \quad (\text{PPS} + \text{DESI}), \quad (8.1.8a)$$

$$\Omega_{K,0} = -0.029_{-0.052}^{+0.050} \quad (\text{Base 3} + \text{CC}), \quad (8.1.8b)$$

$$\Omega_{K,0} = -0.035_{-0.051}^{+0.048} \quad (\text{Base 3} + \text{CC} + \text{R22}). \quad (8.1.8c)$$

En contraste, se obtienen tensiones de hasta $\sim 3.2\sigma$ respecto al escenario plano cuando se excluye DESI del análisis, lo que evidencia la importancia de estas mediciones para reducir la degeneración geométrica. Este comportamiento se aprecia claramente en las Figs. 8.1.2 y 8.1.4, donde la incorporación de datos de DESI reduce el volumen de las regiones de credibilidad en el espacio de parámetros, particularmente para $\Omega_{K,0}$, r_d y w_0 .

En cuanto a las estimaciones de w_0 , las combinaciones de datos más restrictivas favorecen valores MAP cercanos a $w_0 = -1$. Por ejemplo, en el escenario espacialmente plano se obtiene

$$w_0 = -0.944_{-0.050}^{+0.052} \quad (\text{Base 3} + \text{CC}), \quad (8.1.9a)$$

$$w_0 = -0.981_{-0.050}^{+0.052} \quad (\text{Base 3} + \text{CC} + \text{R22}), \quad (8.1.9b)$$

lo que corresponde a desviaciones de $\sim 1, 1\sigma$ y 0.4σ , respectivamente. Por el contrario, cuando los datos de DESI no se consideran, las estimaciones centrales tienden a desplazarse hacia valores

compatibles con un escenario de quintaesencia.

En cuanto a la parte disipativa, el coeficiente de viscosidad adimensional $\tilde{\zeta}_0$ se restringe a valores positivos a través de la distribución previa adoptada en el análisis. De forma consistente, el coeficiente de viscosidad de volumen actual ζ_0 , calculado a partir de la Ec. (4.1.11), reproduce el comportamiento obtenido en los modelos Λ vCDM y Λ vCDM + Ω_K analizados en el Capítulo 7. En los escenarios considerados, tanto para $m = 0$ como para m libre, las estimaciones conducen sistemáticamente a valores del orden de

$$\zeta_0 \sim 10^6 \text{ Pa.s.} \quad (8.1.10)$$

Sin embargo, en todos los escenarios estudiados, el parámetro permanece compatible con $\tilde{\zeta}_0 = 0$ dentro de 1σ , lo que indica que no existe evidencia significativa de viscosidad en la CDM a partir de los conjuntos de datos considerados. Por último, los resultados (Tabla 8.5.2) muestran que todos los conjuntos de datos favorecen a $m < 0$.

8.2. Modelos $w_0 w_a$ VCDM

En esta sección se presentan los resultados obtenidos para los modelos que incorporan una componente viscosa junto con una ecuación de estado dinámica CPL para la energía oscura. Los valores MAP y los intervalos de credibilidad al 68 % para cada parámetro se resumen en las Tablas 8.5.3 y 8.5.4. En las Figs. 8.2.1 y 8.2.2 se muestran las distribuciones posteriores para los modelos con viscosidad constante, mientras que las Figs. 8.2.3 y 8.2.4 presentan los resultados para el caso con m libre. En ambas figuras se exhiben los contornos bidimensionales al 68 % y 95 % NC, así como las distribuciones posteriores marginalizadas unidimensionales de los parámetros libres.

8.2.1. Caso con $m = 0$

En primer lugar, se analiza el escenario con viscosidad constante, correspondiente a $m = 0$. Los resultados se resumen en la Tabla 8.5.3, mientras que los contornos correspondientes se presentan en las Figs. 8.2.1 y 8.2.2.

Una vez más se observa que las estimaciones de la constante de Hubble dependen de forma apreciable del conjunto de datos considerado. En particular, en escenarios de universo plano, la combinación PPS + DESI conduce a un valor $H_0 = 73.0 \pm 1.2 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, mientras que para PP + DESI se obtiene un valor significativamente menor, $H_0 = 65.5^{+3.9}_{-4.0} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, lo que se traduce en una tensión de $\sim 2\sigma$. Por su parte, las combinaciones que incorporan CC mantienen

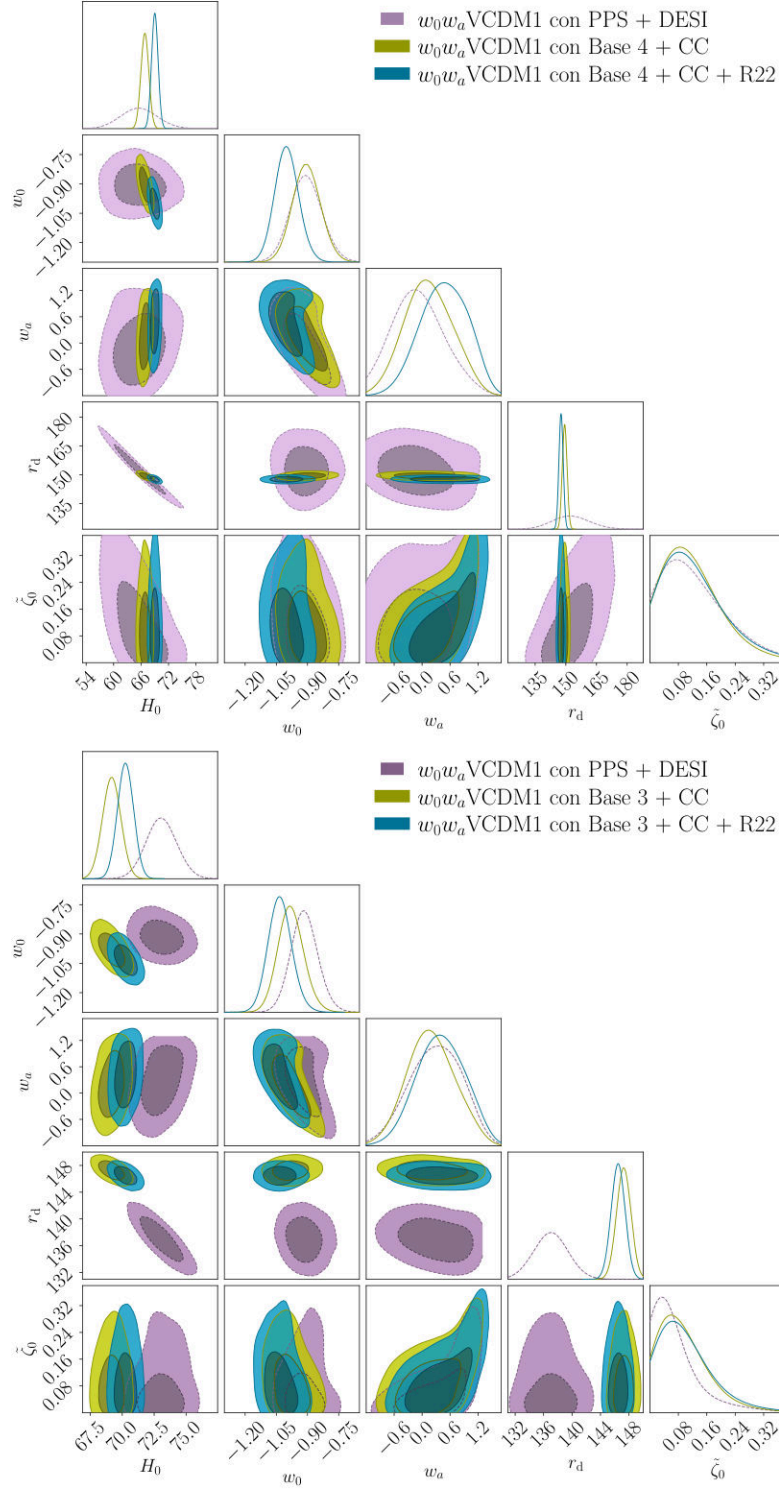


Figura 8.2.1: Distribuciones posteriores de los parámetros cosmológicos para los modelos w_0w_a VCDM1 con viscosidad constante. *Panel superior*: conjuntos de datos PP + DESI, Base 4, CC y R22. *Panel inferior*: conjuntos de datos PPS + DESI, Base 3, CC y R22. Los contornos muestran regiones de credibilidad en 2D al 68 % y 95 %, junto con sus distribuciones posteriores marginalizadas en 1D de cada parámetro.

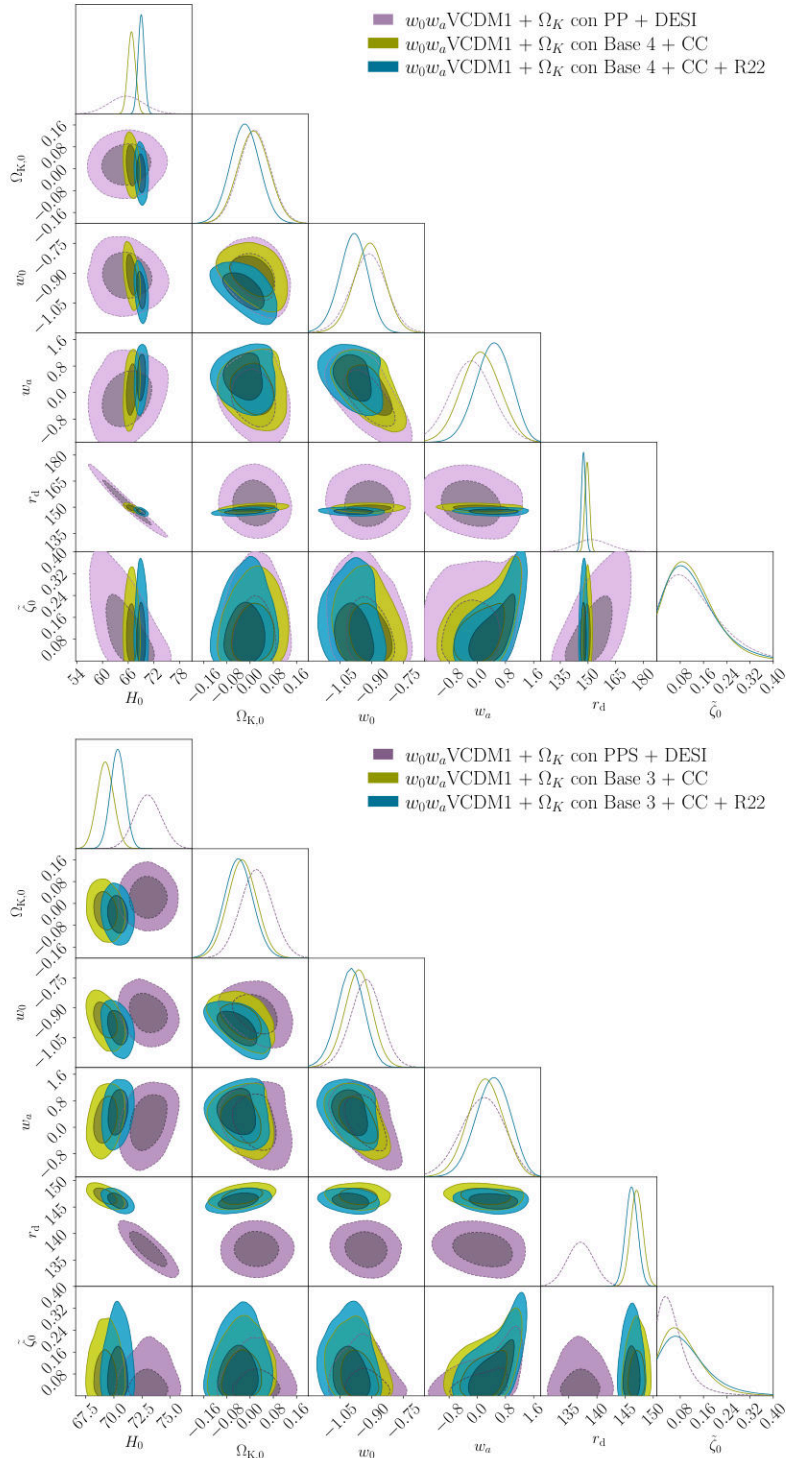


Figura 8.2.2: Restricciones sobre los parámetros cosmológicos para los modelos w_0w_a VCDM1 + Ω_K con viscosidad constante. *Panel superior*: conjuntos de datos PP + DESI, Base 4, CC y R22. *Panel inferior*: conjuntos de datos PPS + DESI, Base 3, CC y R22. Los contornos muestran regiones de credibilidad en 2D al 68 % y 95 %, junto con sus distribuciones posteriores marginalizadas en 1D de cada parámetro.

una tensión similar ($\sim 2.1 \sigma$). Sin embargo, al incluir R22 la discrepancia se reduce a $\sim 1.3 \sigma$. En este caso se obtienen

$$H_0 = 70.80 \pm 0.72 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (\text{Base 2} + \text{CC} + \text{R22}), \quad (8.2.1a)$$

$$H_0 = 70.25^{+0.63}_{-0.62} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (\text{Base 3} + \text{CC} + \text{R22}), \quad (8.2.1b)$$

$$H_0 = 69.01^{+0.70}_{-0.71} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (\text{Base 4} + \text{CC} + \text{R22}). \quad (8.2.1c)$$

Este comportamiento es consistente con lo observado en análisis previos: los datos de PPS tienden a favorecer valores más altos de H_0 , mientras que los datos de PP prefieren valores más bajos. La inclusión de CC modera parcialmente esta diferencia, desplazando las estimaciones hacia valores intermedios. Por su parte, la incorporación de R22 favorece soluciones con valores ligeramente mayores de H_0 , reduciendo la discrepancia entre los distintos conjuntos de datos. Por otro lado, la inclusión de curvatura espacial no modifica de forma apreciable las restricciones sobre H_0 , obteniéndose

$$H_0 = 71.51^{+0.75}_{-0.78} \quad (\text{Base 2} + \text{CC} + \text{R22}), \quad (8.2.2a)$$

$$H_0 = 70.34 \pm 0.64 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (\text{Base 3} + \text{CC} + \text{R22}), \quad (8.2.2b)$$

$$H_0 = 69.03^{+0.72}_{-0.73} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (\text{Base 4} + \text{CC} + \text{R22}). \quad (8.2.2c)$$

Los parámetros de densidad de materia $\Omega_{b,0}h^2$ y $\Omega_{vc,0}h^2$ se mantienen notablemente estables entre las distintas combinaciones de datos. Por ejemplo, se obtiene $\Omega_{vc,0}h^2 = 0.128 \pm 0.011$ para la combinación PPS + DESI y $\Omega_{vc,0}h^2 = 0.123 \pm 0.011$ para Base 4 + CC + R22, lo que indica que la inclusión de una ecuación de estado dinámica y de viscosidad de volumen constante no altera de forma significativa la reconstrucción de la densidad de VCDM actual.

En cuanto al sector dinámico de la ecuación de estado de la energía oscura, el parámetro w_0 es compatible con $w_0 = -1$ dentro de 1σ para la mayoría de las combinaciones analizadas. En particular,

$$w_0 = -0.986^{+0.065}_{-0.059} \quad (\text{Base 3} + \text{CC}), \quad (8.2.3a)$$

$$w_0 = -1.034^{+0.056}_{-0.057} \quad (\text{Base 3} + \text{CC} + \text{R22}), \quad (8.2.3b)$$

$$w_0 = -1.003^{+0.059}_{-0.055} \quad (\text{Base 4} + \text{CC} + \text{R22}). \quad (8.2.3c)$$

Para algunas combinaciones se obtienen valores algo menos negativos, independientemente de la geometría espacial, lo que indica una leve preferencia por soluciones tipo quintaesencia. En particular, al considerar la curvatura espacial, para las combinaciones Base 2 se obtienen

$$w_0 = -0.77^{+0.15}_{-0.13} \quad \text{Base 2 + CC}, \quad (8.2.4a)$$

$$w_0 = -0.77^{+0.16}_{-0.13} \quad \text{Base 2 + CC + R22}. \quad (8.2.4b)$$

Esto refleja una restricción más débil sobre la ecuación de estado en ausencia de DESI. No obstante, las desviaciones permanecen por debajo de $\sim 2\sigma$ respecto a la constante cosmológica.

Por otro lado, el parámetro w_a permanece débilmente restringido para todos los conjuntos de datos. Sus valores medios oscilan entre soluciones levemente negativas y positivas, por ejemplo

$$w_a = -0.15^{+0.60}_{-0.58} \quad (\text{PP + DESI}), \quad (8.2.5a)$$

$$w_a = 0.13^{+0.56}_{-0.49} \quad (\text{Base 3 + CC}), \quad (8.2.5b)$$

$$w_a = 0.47^{+0.56}_{-0.49} \quad (\text{Base 4 + CC + R22}). \quad (8.2.5c)$$

Los resultados obtenidos con la combinación de datos PP + DESI se encuentran en acuerdo con los reportados por la colaboración DESI, donde se obtiene $w_a = -0.17 \pm 0.46$ (Abdul Karim et al., 2025), presentando una diferencia de $\sim 0.03\sigma$. Además, en la mayoría de las combinaciones analizadas, el valor $w_a = 0$ permanece compatible con los datos dentro de $\sim 1\sigma$. Las desviaciones más grandes aparecen para las combinaciones Base 2 en el escenario no plano, alcanzando $\sim 1.8\sigma$. Sin embargo, no constituyen evidencia estadísticamente significativa de una evolución temporal del parámetro de la ecuación de estado.

Los contornos bidimensionales de las Figs. 8.2.1 y 8.2.2 muestran una correlación negativa moderada entre w_0 y w_a , consistente con el comportamiento esperado en la parametrización CPL. Particularmente, desde el panel superior de la Fig. 8.2.1 se tiene $\text{corr} = -0.654$ para PPS + DESI, $\text{corr} = -0.528$ para Base 4 + CC y $\text{corr} = -0.391$ para Base 4 + CC + R22. No obstante, las regiones de credibilidad presentan una extensión apreciable, lo que sugiere que esta correlación no corresponde a una degeneración fuerte, sino a restricciones relativamente débiles de estos parámetros. Asimismo, se observa una correlación positiva entre w_a y $\tilde{\zeta}_0$ en el panel inferior de la Fig 8.2.1, con valores representativos como $\text{corr} = 0.555$ para PPS + DESI y $\text{corr} = 0.628$ para Base 4 + CC + R22.

El parámetro $\Omega_{K,0}$ se mantiene compatible con la planitud espacial dentro de 1σ para todas las combinaciones de datos que incluyen DESI. En el modelo w_0w_a VCDM1 + Ω_K se tiene que

$$\Omega_{K,0} = 0.022^{+0.056}_{-0.055} \quad (\text{PPS} + \text{DESI}), \quad (8.2.6a)$$

$$\Omega_{K,0} = -0.040^{+0.049}_{-0.050} \quad (\text{Base 3} + \text{CC} + \text{R22}), \quad (8.2.6b)$$

correspondientes a desviaciones de $\sim 0.4\sigma$ y $\sim 0.8\sigma$ respecto a la planitud, respectivamente. En contraste, cuando se excluyen los datos de DESI, se obtienen valores negativos del parámetro de curvatura con una significancia mayor: $\Omega_{K,0} = -0.28^{+0.12}_{-0.10}$ para Base 2 + CC y $\Omega_{K,0} = -0.318^{+0.107}_{-0.079}$ para Base 2 + CC + R22. Estos valores corresponden a desviaciones de $\sim 2.5\sigma$ y $\sim 3.4\sigma$ respecto a un universo espacialmente plano, lo que sugiere una preferencia por un universo con curvatura positiva (cerrado). Este resultado evidencia una tensión moderada con la hipótesis de planitud espacial cuando no se incluyen las mediciones de DESI en el análisis.

En cuanto al sector disipativo, el parámetro de viscosidad adimensional $\tilde{\zeta}_0$ toma valores positivos y pequeños para todas las combinaciones de datos consideradas. El escenario w_0w_a VCDM1 + Ω_K , por ejemplo, arroja $\tilde{\zeta}_0 = 0.030^{+0.052}_{-0.029}$ para PPS + DESI y $\tilde{\zeta}_0 = 0.087^{+0.093}_{-0.075}$ para Base 4 + CC. Un comportamiento similar se presenta en los demás escenarios considerados, con desviaciones respecto a la viscosidad nula que permanecen dentro de $\sim 1\sigma$, tanto en el caso plano como en el no plano. Además, se observa un buen acuerdo con los datos observacionales, como se muestra en las Figs. 8.3.1 y 8.3.2. De forma consistente, el coeficiente de viscosidad actual ζ_0 , calculado a partir de la Ec. (4.1.10), resulta aproximadamente $\zeta_0 \sim 10^6$ Pa s, manteniendo la misma escala obtenida en otros escenarios viscosos analizados dentro del formalismo de Eckart.

8.2.2. Caso con m libre

A continuación, se analiza el escenario en el que el índice viscoso m se considera un parámetro libre. Los valores MAP y los intervalos de credibilidad al 68 % para cada parámetro se presentan en la Tabla 8.5.4, mientras que las distribuciones posteriores correspondientes se muestran en las Figs. 8.2.3 y 8.2.4.

Al permitir que el índice m varíe libremente, este parámetro permanece débilmente constreñido por todas las combinaciones de datos consideradas. No obstante, los resultados muestran una preferencia sistemática por valores negativos ($m < 0$), lo que sugiere que la viscosidad adquiriría mayor relevancia en épocas tardías de la evolución cosmológica. En general, las estimaciones

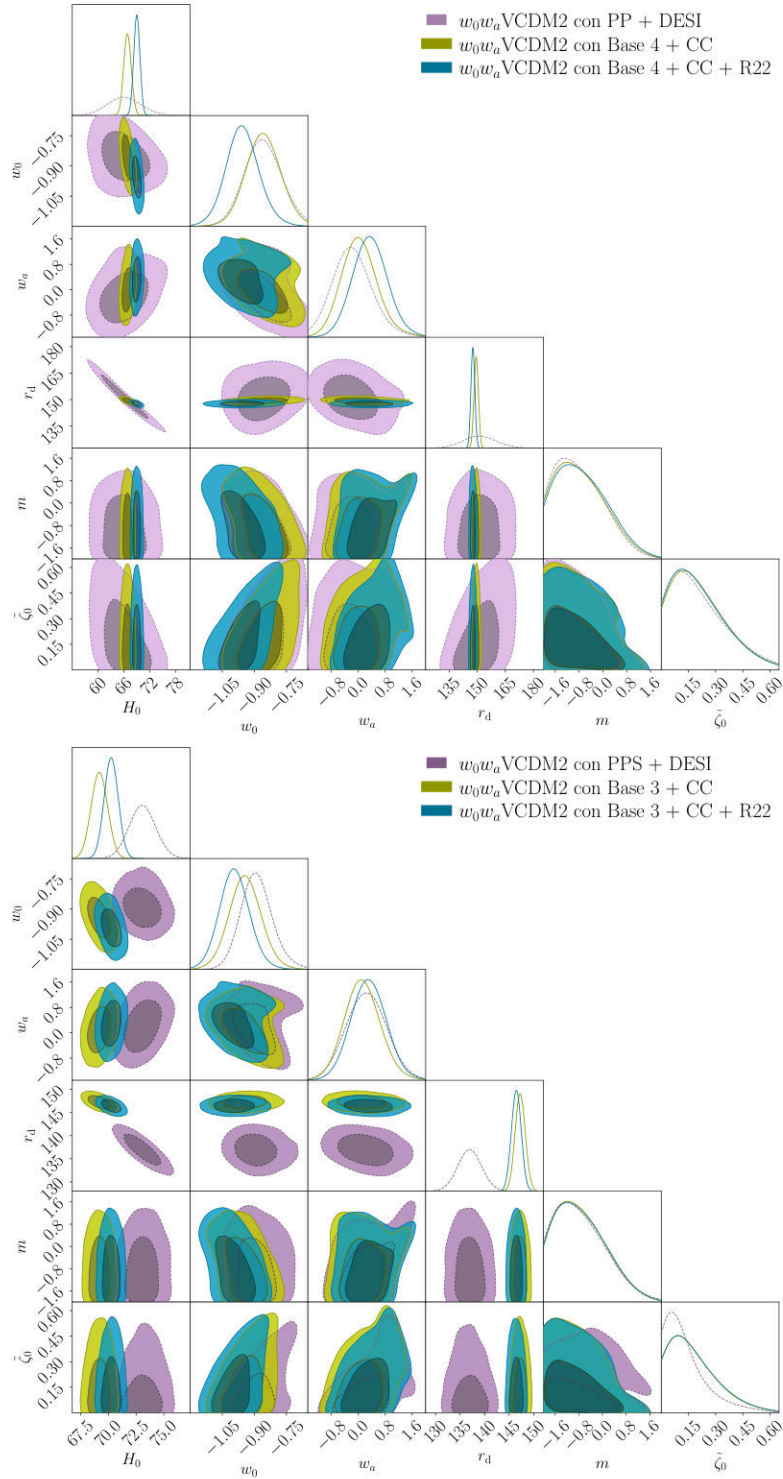


Figura 8.2.3: Distribuciones posteriores de los parámetros cosmológicos para los modelos $w_0 w_a$ VCDM2 con m libre. *Panel superior*: conjuntos de datos PP + DESI, Base 4, CC y R22. *Panel inferior*: conjuntos de datos PPS + DESI, Base 3, CC y R22. Los contornos muestran regiones de credibilidad en 2D al 68% y 95%, junto con sus distribuciones posteriores marginalizadas en 1D de cada parámetro.

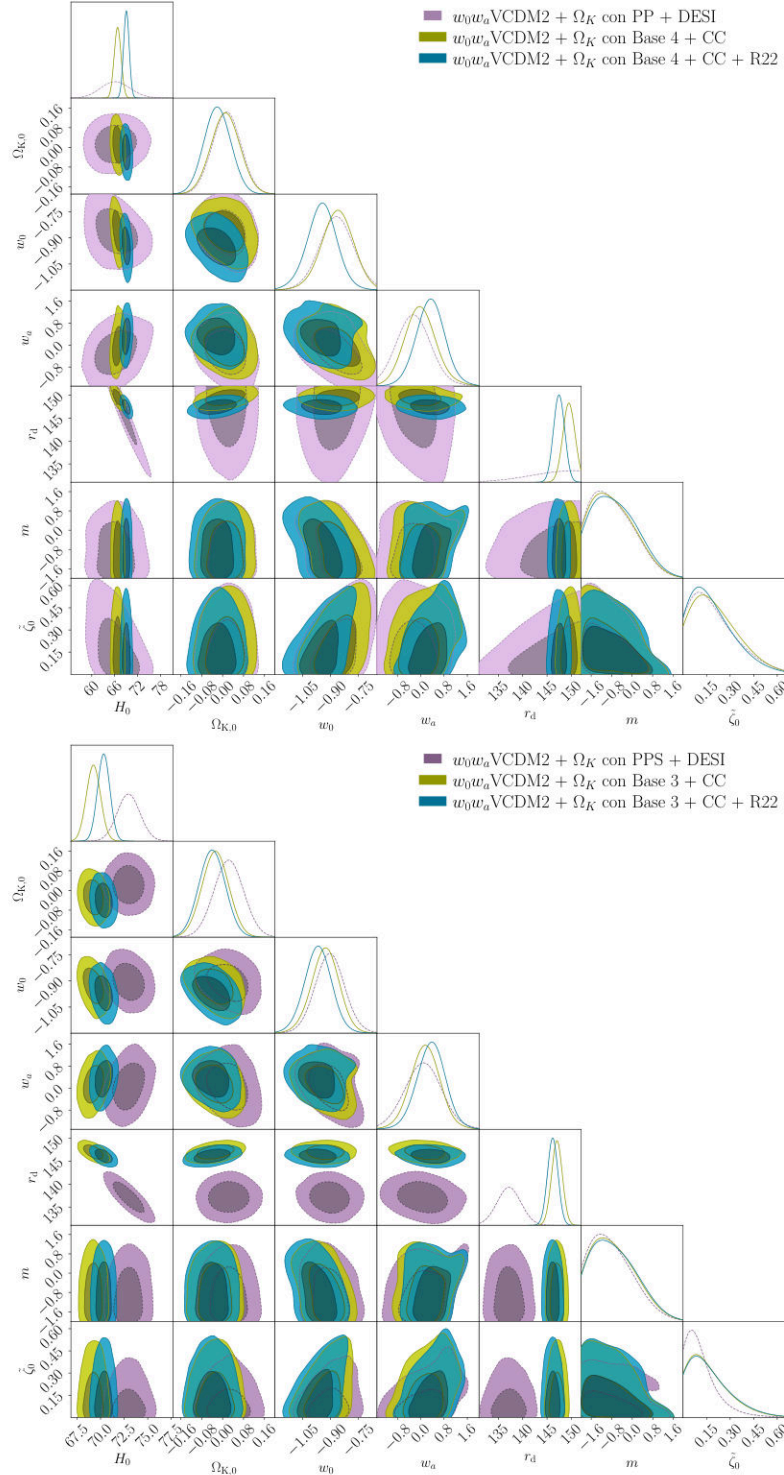


Figura 8.2.4: Distribuciones posteriores de los parámetros cosmológicos para los modelos w_0w_a VCDM2 + Ω_K con m libre. *Panel superior*: conjuntos de datos PP + DESI, Base 4, CC y R22. *Panel inferior*: conjuntos de datos PPS + DESI, Base 3, CC y R22. Los contornos muestran regiones de credibilidad en 2D al 68 % y 95 %, junto con sus distribuciones posteriores marginalizadas en 1D de cada parámetro.

MAP son compatibles con un valor cercano a $m \sim -1$, aunque las incertidumbres asociadas son considerablemente amplias. Por su parte, el parámetro adimensional $\tilde{\zeta}_0$ toma valores positivos pero pequeños para todas las combinaciones de datos consideradas, permaneciendo compatible con viscosidad nula dentro de $\sim 1\sigma$. De forma consistente, el coeficiente de viscosidad actual se mantiene en el orden de

$$\zeta_0 \sim 10^6 \text{ Pa.s.} \quad (8.2.7)$$

Las estimaciones del parámetro de Hubble muestran un comportamiento similar al observado en el escenario $m = 0$, independientemente de la geometría espacial. Las combinaciones que incluyen PPS favorecen valores más altos de H_0 , mientras que aquellas basadas en PP tienden a preferir valores menores. Al incluir R22, se obtiene

$$H_0 = 71.46_{-0.78}^{+0.77} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (\text{Base 2} + \text{CC} + \text{R22}), \quad (8.2.8a)$$

$$H_0 = 70.34_{-0.66}^{+0.64} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (\text{Base 3} + \text{CC} + \text{R22}), \quad (8.2.8b)$$

$$H_0 = 69.05_{-0.74}^{+0.73} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (\text{Base 4} + \text{CC} + \text{R22}). \quad (8.2.8c)$$

Los parámetros w_0 y w_a muestran un comportamiento que depende del conjunto de datos utilizado. Para las combinaciones que incluyen datos de DESI, las estimaciones de w_0 se mantienen cercanas a -1 , mientras que w_a son compatibles con cero dentro de $\sim 1\sigma$, en concordancia con el límite Λ CDM. En contraste, cuando se excluyen los datos de DESI, se observa una preferencia por valores de w_0 menos negativos, típicos de escenarios de quintaesencia, aunque con incertidumbres más amplias y desviaciones dentro de 2σ . Para el modelo $w_0 w_a$ VCDM2 se obtiene $w_0 = -0.88_{-0.12}^{+0.13}$ con Base 2 + CC + R22, y al incluir curvatura espacial, la estimación es $w_0 = -0.771_{-0.099}^{+0.115}$ para la misma combinación de datos. Estos valores, si bien se desvían del límite Λ CDM, lo hacen dentro de un nivel de significancia moderado. Tendencias similares han sido reportadas en análisis recientes de la colaboración DESI (Abdul Karim et al., 2025) y utilizando la compilación PP (Brout et al., 2022).

El parámetro $\Omega_{K,0}$ también presenta un comportamiento que depende del conjunto de datos empleado. Para las combinaciones que incluyen mediciones de DESI, el valor de $\Omega_{K,0}$ permanece compatible con un universo espacialmente plano dentro de 1σ . Por ejemplo, se obtiene

$$\Omega_{K,0} = 0.022_{-0.056}^{+0.058} \quad (\text{PPS} + \text{DESI}), \quad (8.2.9a)$$

$$\Omega_{K,0} = -0.028 \pm 0.051 \quad (\text{Base 3 + CC}). \quad (8.2.9b)$$

En contraste, cuando se excluyen los datos de DESI, se observa en la Tabla (8.5.4), la preferencia por valores negativos de $\Omega_{K,0}$ se vuelve más pronunciada, con desviaciones que alcanzan hasta $\sim 2.1\sigma$ respecto a la planitud espacial, lo cual es indicativo de curvatura positiva (universo cerrado).

8.3. Modelos de selección

Con el fin de evaluar el desempeño estadístico de los modelos cosmológicos viscosos considerados en este capítulo, se realiza una comparación cuantitativa con el modelo estándar Λ CDM ($\tilde{\zeta}_0 = 0$) utilizando distintos criterios de selección de modelos. En este análisis se emplean los criterios de información AIC, BIC y DIC, definidos en la Sección 5.5.2, a partir de las Ecs. (5.5.7), (5.5.9) y (5.5.10), respectivamente. Como complemento a estos criterios, se considera además la evidencia bayesiana, la cual incorpora la información previa del modelo y permite realizar una comparación estadística más completa entre los distintos escenarios cosmológicos.

Los resultados obtenidos para los modelos w VCDM y w_0w_a VCDM en el formalismo de Eckart se resumen en las Tablas 8.5.5 y 8.5.6, respectivamente. En dichas tablas se presentan los valores de ΔIC , los cuales se calculan respecto al modelo de referencia Λ CDM (véase Tablas 8.5.7 y 8.5.8), de acuerdo con las Ecs. (5.5.13) y (7.4.1),

$$\Delta\text{IC} = \text{IC}_{\Lambda\text{CDM}} - \text{IC}_i,$$

de modo que un valor positivo de ΔIC indica una preferencia estadística por el modelo viscoso. Asimismo, en las tablas se reportan los valores de la evidencia bayesiana ($\ln \mathcal{E}_i$) y del correspondiente factor de Bayes ($\ln \mathcal{B}_i$), definido en la Ec. (5.5.6), es decir,

$$\ln \mathcal{B}_{0i} = \ln \mathcal{E}_{\Lambda\text{CDM}} - \ln \mathcal{E}_i,$$

para cada uno de los modelos viscosos considerados. Una descripción más detallada de su definición e interpretación se presenta en la Sección 5.5.1.

8.3.1. Criterio de Información

El análisis mediante criterios de información muestra que la mayoría de los modelos viscosos no presentan una mejora estadísticamente significativa frente al modelo estándar Λ CDM. En

la mayoría de las combinaciones de datos se obtienen valores negativos de ΔIC , lo que indica preferencia por el modelo estándar.

Entre los modelos con parámetro de ecuación de estado constante, el escenario que muestra la mayor desviación respecto a ΛCDM corresponde al modelo $w\text{VCDM1} + \Omega_K$ para la combinación Base 2 + CC + R22. En este caso se obtienen $\Delta\text{AIC} = 7.37$ y $\Delta\text{DIC} = 10.54$, lo que corresponde a evidencia fuerte y muy fuerte a favor del modelo viscoso de acuerdo con estos criterios. De forma similar, el modelo $w\text{VCDM2} + \Omega_K$ para la misma combinación de datos presenta $\Delta\text{AIC} = 5.36$ y $\Delta\text{DIC} = 10.51$, lo que indica nuevamente evidencia positiva y muy fuerte, respectivamente. Sin embargo, esta preferencia se anula al considerar otras combinaciones de datos. Por ejemplo, al incluir DESI se obtienen valores de $\Delta\text{AIC} < -4$ para Base 3 + CC y $\Delta\text{AIC} < -5$ para Base 3 + CC + R22, mientras que para la compilación PPS se obtiene $\Delta\text{AIC} < -5$. Estos resultados indican una preferencia positiva y, en algunos casos, evidencia fuerte a favor del modelo estándar ΛCDM . Por su parte, el BIC muestra evidencia muy fuerte a favor del modelo estándar ΛCDM en todos los escenarios analizados, con valores $\Delta\text{BIC} < -14$. Cabe destacar que el modelo $w\text{VCDM2} + \Omega_K$ alcanza $\Delta\text{BIC} = -36.76$ para PPS, lo que constituye la evidencia más fuerte a favor de ΛCDM frente al modelo viscoso dentro de este criterio.

Para los modelos con ecuación de estado dinámica CLP, $w_0w_a\text{VCDM}$, los resultados son, en general, menos favorables para los escenarios viscosos. En la mayoría de las combinaciones de datos consideradas, los valores de ΔAIC y ΔBIC permanecen negativos, lo que indica una preferencia por el modelo estándar ΛCDM una vez penalizada la mayor complejidad paramétrica de estos modelos.

No obstante, el DIC muestra que en algunos casos los modelos viscosos resultan competitivos. Por ejemplo, para el modelo plano $w_0w_a\text{VCDM1}$ se obtiene $\Delta\text{DIC} = 6.09$ para PPS + DESI y $\Delta\text{DIC} = 6.35$ para Base 4 + CC, lo que corresponde a evidencia fuerte a favor del modelo viscoso. En contraste, para la combinación Base 4 + CC + R22 se obtiene $\Delta\text{DIC} = 1.97$, lo que indica evidencia débil. Para el modelo $w_0w_a\text{VCDM2}$, los resultados son aún menos concluyentes. En particular, se obtiene $\Delta\text{DIC} = 3.61$ para PPS + DESI y $\Delta\text{DIC} = 4.80$ para Base 4 + CC, lo que corresponde a evidencia positiva a favor del modelo viscoso. Sin embargo, para las combinaciones de datos Base 3 + CC y Base 3 + CC + R22 se obtienen $\Delta\text{DIC} < -2$, lo que indica una preferencia por el modelo estándar. En consecuencia, el modelo $w_0w_a\text{VCDM2}$ solo muestra evidencia positiva para combinaciones específicas de datos, mientras que en el resto de los casos la comparación estadística resulta no concluyente o favorece a ΛCDM .

Estos resultados indican que la inclusión de viscosidad de volumen y curvatura espacial puede producir mejoras puntuales en algunos conjuntos de datos, pero dicha mejora no es consistente

entre los diferentes criterios de información ni entre las distintas combinaciones observacionales.

8.3.2. Factor de Bayes

Como complemento a los criterios de información, se considera la evidencia bayesiana, que permite comparar modelos incorporando explícitamente la información previa y penalizando de forma natural a aquellos parámetros que no están bien constreñidos por los datos.

Para estimar la evidencia bayesiana de los modelos viscosos en relación con Λ CDM, se utiliza el código MCEvidence (Heavens et al., 2017a,b). A partir de las cadenas MCMC obtenidas en la inferencia de parámetros, se calculan los factores de Bayes para las distintos modelos y conjuntos de datos. La interpretación de los resultados se realiza mediante la escala de Jeffreys (Jeffreys, 1961; Kass & Raftery, 1995), adoptando la convención propuesta por Heavens et al. (2017b), la cual se resume en la Tabla 5.5.1.

Entre los modelos con ecuación de estado constante, el escenario más competitivo corresponde al modelo plano w VCDM2. Para este modelo se obtiene $\ln \mathcal{B}_{0i} = -3.72$ para PPS, lo que indica evidencia fuerte a favor del modelo viscoso frente a Λ CDM. Asimismo, se encuentra evidencia positiva para otras combinaciones de datos, como Base 2 + CC ($\ln \mathcal{B}_{0i} = -2.50$) y Base 2 + CC + R22 ($\ln \mathcal{B}_{0i} = -2.38$), lo que sugiere que este escenario puede competir con el modelo estándar cuando se permite un índice viscoso libre. En contraste, al incluir datos de DESI y considerar curvatura espacial, la evidencia tiende a favorecer nuevamente a Λ CDM. Por ejemplo, para el modelo w VCDM1 + Ω_K se obtiene $\ln \mathcal{B}_{0i} = 4.81$ para PPS + DESI y $\ln \mathcal{B}_{0i} = 4.68$ para Base 3 + CC + R22, valores que corresponden a evidencia fuerte a favor del modelo estándar.

Para los modelos con parámetro de ecuación de estado dinámica de tipo CPL, el factor de Bayes favorece al modelo Λ CDM. En particular, para el modelo plano $w_0 w_a$ VCDM1 se obtienen valores positivos como $\ln \mathcal{B}_{0i} = 2.08$ para PPS + DESI y $\ln \mathcal{B}_{0i} = 2.43$ para Base 3 + CC + R22, lo que indica evidencia positiva a favor del modelo estándar. Esta preferencia se refuerza al considerar la extensión con curvatura espacial, donde se obtienen valores como $\ln \mathcal{B}_{0i} = 5.16$ y $\ln \mathcal{B}_{0i} = 5.58$ para las mismas combinaciones de datos, correspondientes a evidencia muy fuerte a favor de Λ CDM.

Aunque algunos criterios de información muestran mejoras puntuales para ciertos modelos viscosos, el análisis basado en la evidencia bayesiana indica que el modelo Λ CDM continúa proporcionando, en términos generales, una descripción estadística más consistente de los datos cosmológicos considerados.

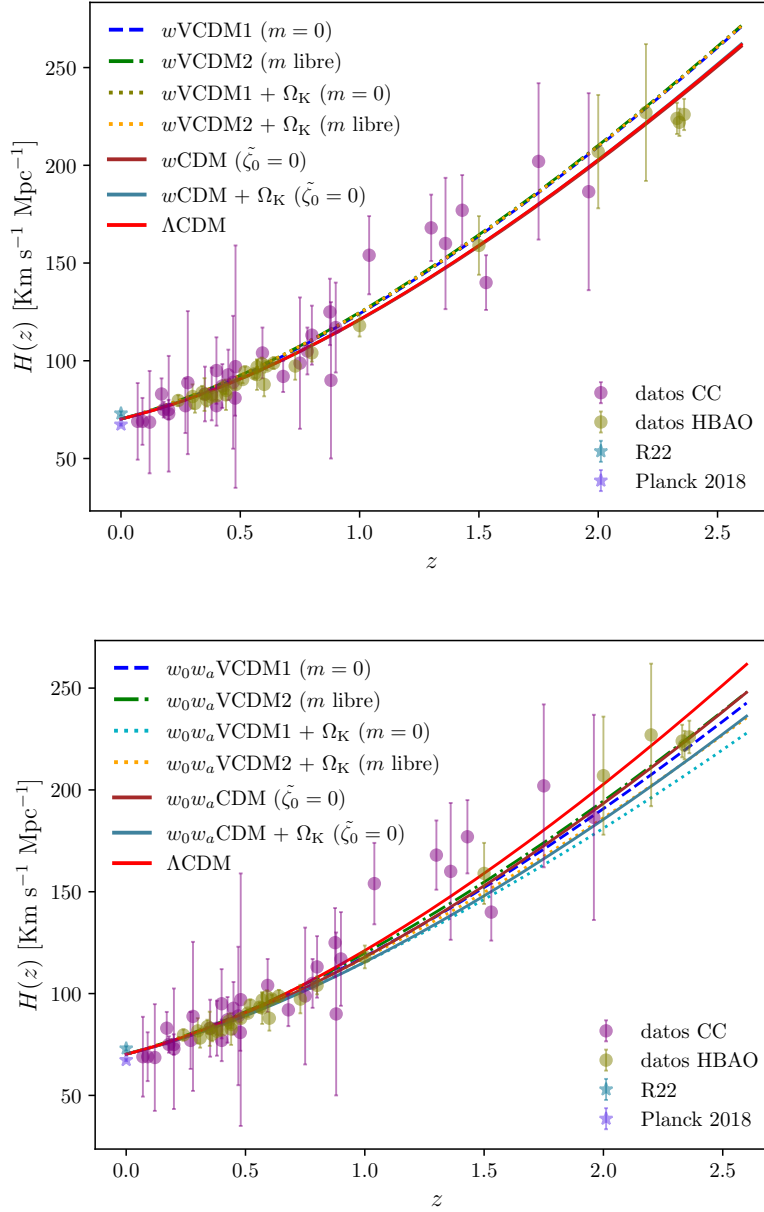


Figura 8.3.1: Evolución del parámetro de Hubble $H(z)$ en función del corrimiento al rojo z . Se muestran datos observacionales independientes del parámetro de Hubble, todos con sus respectivas barras de error: CC (puntos púrpura, $0.07 < z < 1.965$), HBAO (puntos verde oliva, $0.24 < z < 2.36$), la determinación local de H_0 desde SH0ES (R22; estrella azul marino) y el valor inferido del CMB (Planck 2018; estrella morada). Los datos se comparan con las predicciones teóricas: las líneas continuas roja, café y verde corresponden a los modelos Λ CDM, w CDM y w CDM + Ω_K ; las líneas discontinuas, punto-guion y punteadas representan los distintos escenarios de los modelos con viscosidad en el formalismo de Eckart: w VCDM y w VCDM + Ω_K (*Panel superior*), w_0w_a VCDM y w_0w_a VCDM + Ω_K (*Panel inferior*). Los parámetros han sido restringidos utilizando la combinación de datos Base 3 + CC + R22.

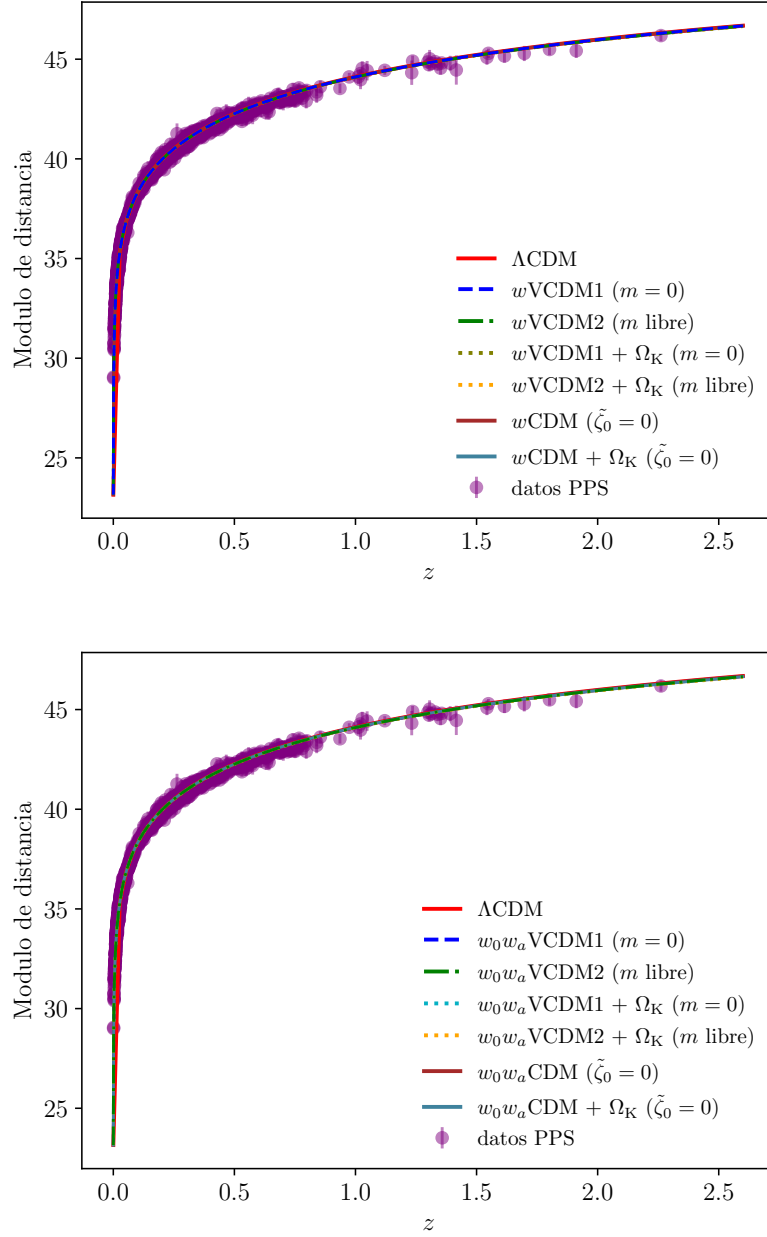


Figura 8.3.2: Módulo de distancia observado de la compilación PPS (puntos púrpura con barras de error) en el intervalo $0.001 < z < 2.26$. Los datos se comparan con las predicciones teóricas: las líneas continuas roja, café y verde corresponden a los modelos Λ CDM, w CDM y w CDM + Ω_K ; las líneas discontinuas, punto-guion y punteadas representan los distintos escenarios de los modelos con viscosidad en el formalismo de Eckart: w VCDM y w VCDM + Ω_K (*Panel superior*), w_0w_a VCDM y w_0w_a VCDM + Ω_K (*Panel inferior*). Los parámetros han sido restringidos utilizando la combinación de datos Base 3 + CC + R22.

8.4. Evolución de parámetros cosmológicos

La Fig. 8.3.1 muestra la evolución del parámetro de Hubble $H(z)$ en función del corrimiento al rojo z para los modelos w VCDM y w_0w_a VCDM, junto con sus extensiones con curvatura espacial, en los casos $m = 0$ y m libre. Además, como referencia, se incluyen los modelos correspondientes con $\zeta_0 = 0$ y el modelo Λ CDM. La Fig. 8.3.2 presenta la comparación entre el módulo de distancia teórica y los datos de la compilación PPS de SNe Ia para estos mismos modelos. En ambos casos, los parámetros han sido restringidos utilizando la combinación de datos Base 3 + CC + R22.

En general, las predicciones teóricas (véase las Ecs. (4.1.17) y (4.1.21)) reproducen adecuadamente la tendencia de los datos observacionales de $H(z)$, describiendo de forma consistente la expansión cósmica en todo el intervalo de corrimiento al rojo considerado. Las diferencias entre las distintas parametrizaciones son pequeñas dentro del rango cubierto por los datos. No obstante, se observan separaciones moderadas entre algunas curvas para $z > 1$, que se vuelven ligeramente más visibles hacia $z > 1.5$, particularmente en los modelos con parametrización CPL y curvatura espacial (véase el panel inferior de la Fig 8.3.1).

En el caso del módulo de distancia, el modelo reproduce adecuadamente las observaciones. Las curvas prácticamente se superponen entre sí, lo que indica que, a este nivel, las diferencias entre los modelos w VCDM y w_0w_a VCDM, así como entre sus versiones planas y no planas, son pequeñas para la combinación de datos considerada.

8.5. Conclusiones

En este capítulo se llevó a cabo un análisis observacional de ocho modelos cosmológicos con viscosidad de volumen dentro del formalismo de Eckart, considerando tanto un parámetro de ecuación de estado constante como una parametrización dinámica CPL para la energía oscura. En estos modelos, el coeficiente de viscosidad de volumen evoluciona de acuerdo con una ley de potencia de forma

$$\zeta = \zeta_0 \left(\frac{\Omega_{\text{vc}}}{\Omega_{\text{vc},0}} \right)^m.$$

Se exploraron tanto el caso de viscosidad constante ($m = 0$) como el escenario de viscosidad variable (m libre), considerando geometrías espaciales planas y con curvatura. Por medio de un enfoque bayesiano basado en muestreo de MCMC, estos modelos fueron restringidos utilizando mediciones del parámetro de Hubble $H(z)$ a partir de los CC, una compilación independiente de

datos de las BAO (HBAO), incluyendo las mediciones de DESI, datos de SNe Ia (PP/PPS) y R22. De este análisis se derivan las siguientes conclusiones principales.

La tensión en H_0 persiste en los escenarios analizados, aunque se observa un alivio parcial al incorporar mediciones locales. Para los modelos con ecuación de estado dinámica, combinaciones como PPS + DESI favorecen valores de H_0 notablemente más altos ($H_0 = 73.0 \pm 1.2 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$) en comparación con aquellas que incluyen la muestra PP ($H_0 = 65.5^{+3.9}_{-4.0} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ para PP + DESI). Sin embargo, la inclusión de CC y R22 modera esta diferencia, resultando en valores como $H_0 = 70.25^{+0.63}_{-0.62} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (Base 3 + CC + R22) y $H_0 = 69.01^{+0.70}_{-0.71} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (Base 4 + CC + R22) para el modelo $w_0 w_a$ VCDM1, reduciendo la tensión a $\sim 1.3\sigma$. En los modelos con ecuación de estado constante, las combinaciones de datos que incluyen CC y R22 también conducen a estimaciones intermedias; por ejemplo, para w VCDM1 se tiene que $H_0 = 70.77^{+0.65}_{-0.64} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (Base 2 + CC + R22) y $H_0 = 70.15^{+0.59}_{-0.60} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (Base 3 + CC + R22), donde la tensión se reduce a $\sim 0.7\sigma$. Esta reducción de la tensión se mantiene en todos los modelos y configuraciones consideradas: tanto para geometría espacial plana como con curvatura, y para una evolución de la viscosidad descrita por una ley de potencia, ya sea con $m = 0$ o con m libre.

En los escenarios no planos, los modelos que no incluyen los datos de DESI favorecen valores negativos del parámetro de curvatura ($\Omega_{K,0} < 0$) con una significancia superior a 2σ , lo que sugiere una preferencia por un universo cerrado. Sin embargo, al incorporar las mediciones de DESI, las restricciones se desplazan hacia valores compatibles con la planitud espacial, siendo consistentes dentro de 1σ para todos los modelos analizados. Por ejemplo, para el modelo w VCDM2 + Ω_K se obtiene $\Omega_{K,0} = -0.029^{+0.050}_{-0.052}$ (Base 3 + CC), y para $w_0 w_a$ VCDM1 + Ω_K , $\Omega_{K,0} = -0.040^{+0.049}_{-0.050}$ (Base 3 + CC + R22).

Los parámetros de la ecuación de estado de la energía oscura, w_0 y w_a , permanecen cercanos al límite Λ CDM ($w_0 = -1$, $w_a = 0$) en la mayoría de los análisis. Si bien en algunos escenarios que no incluyen datos de DESI se observan desviaciones hacia valores propios de la quintaesencia ($w_0 > -1$), la inclusión de las mediciones de DESI y, en particular, de R22, desplaza las estimaciones hacia $w_0 = -1$ y $w_a = 0$, junto con reducir significativamente las incertidumbres. Esta tendencia se mantiene en los modelos con parámetro de ecuación de estado constante.

Los resultados indican que la viscosidad de volumen actual presenta un valor característico del orden de $\zeta_0 \sim 10^6 \text{ Pa s}$ en todos los escenarios analizados. Este resultado es coherente con la jerarquía conocida de restricciones cosmológicas (Velten & Schwarz, 2012; Velten et al., 2014) y con lo obtenido en el Capítulo 7 para los modelos Λ vCDM. Además, la condición $\tilde{\zeta}_0 \geq 0$, impuesta mediante la distribución previa adoptada en el análisis, garantiza valores físicamente consistentes

para la viscosidad de volumen actual, en acuerdo con la segunda ley de la termodinámica dentro del formalismo de Eckart. Sin embargo, en la mayoría de los casos, el parámetro $\tilde{\zeta}_0$ permanece compatible con la viscosidad nula dentro de 1σ , lo que indica que no existe evidencia significativa de un término disipativo en la CDM a partir de los conjuntos de datos considerados.

El parámetro que controla la evolución de la viscosidad, el índice m , permanece débilmente constreñido en todos los análisis. Las estimaciones son compatibles con un rango amplio de valores, aunque con una preferencia por $m < 0$ en todas las combinaciones de datos. Esto sugiere que la viscosidad de volumen adquiere mayor relevancia en épocas tardías del universo. Por ejemplo, en el modelo w_0w_a VCDM2 con Base 3 + CC se obtiene $m = -1.17^{+1.04}_{-0.69}$, consistente con esta tendencia pero con una gran incertidumbre.

Los criterios de selección de modelos presentan un panorama matizado. Se encontró que, si bien algunos modelos viscosos (especialmente w VCDM1 + Ω_K) pueden presentar valores de ΔAIC y ΔDIC positivos para ciertas combinaciones de datos (p. ej., Base 2 + CC + R22), estos resultados no son robustos al incluir las mediciones de DESI, donde los criterios vuelven a favorecer al modelo de referencia. Por su parte, el criterio BIC, debido a su penalización más severa de los parámetros adicionales, prefiere de manera sistemática al modelo Λ CDM en todos los escenarios. Los cálculos de evidencia bayesiana refuerzan esta tendencia, mostrando evidencia positiva o fuerte en contra de los escenarios viscosos, particularmente en los modelos con curvatura espacial y al incluir los datos de DESI. Para el modelo w_0w_a VCDM1 + Ω_K con Base 3 + CC + R22 se obtiene $\ln \mathcal{B}_{0i} = 5.58$, lo que constituye una evidencia muy fuerte a favor de Λ CDM. En conjunto, estos resultados indican que, si bien la viscosidad de volumen puede ajustarse a los datos, no supera al modelo Λ CDM cuando se consideran las mediciones más restrictivas y se penaliza adecuadamente la complejidad paramétrica.

Finalmente, el análisis revela grandes incertidumbres tanto en m como en ζ_0 para la mayoría de las configuraciones, lo que pone de manifiesto que los conjuntos observacionales utilizados a nivel de fondo cosmológico no son suficientes para discriminar de forma concluyente entre los distintos escenarios viscosos ni para establecer una desviación robusta respecto al comportamiento de una constante cosmológica. En consecuencia, el modelo estándar Λ CDM continúa siendo la descripción estadísticamente favorecida del universo a nivel del fondo cosmológico, incluso cuando se exploran extensiones con viscosidad de volumen y ecuaciones de estado dinámicas para la energía oscura.

Tablas del Capítulo

Las restricciones sobre los parámetros cosmológicos para los modelos w VCDM, en sus versiones planas y con curvatura espacial, se presentan en las Tablas 8.5.1 y 8.5.2. Los resultados

correspondientes a los modelos con parametrización CPL se resumen en las Tablas 8.5.3 y 8.5.4.

Las Tablas 8.5.5 y 8.5.6 presentan la comparación estadística entre los modelos cosmológicos viscosos y el modelo Λ CDM, considerando $\chi^2_{\min}$, los criterios de información, la evidencia bayesiana y el factor de Bayes para los escenarios con $m = 0$ y m libre.

Finalmente, las Tablas 8.5.7 y 8.5.8 se incluyen como referencia para la comparación entre los distintos modelos cosmológicos. Estas tablas presentan algunos de los resultados obtenidos para los modelos w CDM y w_0w_a CDM, junto con sus extensiones con curvatura espacial, incluyendo además el modelo estándar Λ CDM. En ellas se reportan los criterios de información y la evidencia bayesiana.

Tabla 8.5.1: Resumen de las distribuciones posteriores marginalizadas para los parámetros cosmológicos de los escenarios w VCDM1 y w VCDM1 + Ω_K , correspondiente a viscosidad constante, para distintos conjuntos de datos. Se presentan el MAP y los intervalos de credibilidad al 68 % para cada parámetro. El parámetro de viscosidad ζ_0 se calcula mediante la Ec. (4.1.11).

Datos	H_0 ($\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$)	$\Omega_{K,0}$	$\Omega_{b,0}h^2$	$\Omega_{\text{vc},0}h^2$	w_0	M	$\tilde{\zeta}_0$	$\zeta_0 \times 10^6$ (Pas)
w VCDM1								
PPS	$73.2^{+1.2}_{-1.1}$	–	0.025 ± 0.011	0.123 ± 0.011	$-0.787^{+0.112}_{-0.100}$	-19.245 ± 0.033	$0.082^{+0.137}_{-0.079}$	$3.56^{+5.97}_{-3.43}$
PPS + DESI	$72.8^{+1.1}_{-1.0}$	–	0.032 ± 0.010	0.0130 ± 0.009	$-0.912^{+0.046}_{-0.045}$	$-19.262^{+0.031}_{-0.032}$	$0.018^{+0.032}_{-0.017}$	$0.76^{+1.35}_{-0.72}$
Base 2 + CC	$69.79^{+0.74}_{-0.77}$	–	$0.023^{+0.011}_{-0.010}$	$0.121^{+0.010}_{-0.011}$	$-0.914^{+0.046}_{-0.049}$	-19.367 ± 0.019	$0.097^{+0.072}_{-0.066}$	$3.92^{+2.91}_{-2.67}$
Base 2 + CC + R22	$70.77^{+0.65}_{-0.64}$	–	0.023 ± 0.010	$0.121^{+0.011}_{-0.010}$	$-0.941^{+0.046}_{-0.045}$	$-19.343^{+0.017}_{-0.016}$	$0.092^{+0.070}_{-0.065}$	$3.77^{+2.89}_{-2.66}$
Base 3 + CC	$69.09^{+0.71}_{-0.70}$	–	0.026 ± 0.010	0.0124 ± 0.010	$-0.970^{+0.039}_{-0.040}$	-19.387 ± 0.018	$0.045^{+0.062}_{-0.040}$	$1.80^{+2.48}_{-1.60}$
Base 3 + CC + R22	$70.15^{+0.59}_{-0.60}$	–	$0.026^{+0.010}_{-0.009}$	$0.124^{+0.010}_{-0.009}$	$-1.006^{+0.038}_{-0.037}$	-19.362 ± 0.015	$0.039^{+0.058}_{-0.036}$	$1.58^{+2.35}_{-1.46}$
w VCDM1 + Ω_K								
PPS	$73.3^{+1.2}_{-1.1}$	$-0.20^{+0.36}_{-0.16}$	0.025 ± 0.011	0.122 ± 0.011	$-0.69^{+0.25}_{-0.33}$	-19.245 ± 0.033	$0.10^{+0.19}_{-0.10}$	$4.24^{+8.06}_{-4.24}$
PPS + DESI	72.9 ± 1.1	0.019 ± 0.052	$0.032^{+0.0010}_{-0.009}$	$0.130^{+0.009}_{-0.010}$	$-0.920^{+0.056}_{-0.062}$	$-19.261^{+0.032}_{-0.033}$	$0.019^{+0.034}_{-0.018}$	$0.80^{+1.43}_{-0.76}$
Base 2 + CC	70.45 ± 0.85	$-0.25^{+0.11}_{-0.10}$	0.028 ± 0.010	0.126 ± 0.010	$-0.798^{+0.050}_{-0.060}$	$-19.344^{+0.023}_{-0.022}$	$0.033^{+0.057}_{-0.032}$	$1.35^{+2.32}_{-1.30}$
Base 2 + CC + R22	$71.34^{+0.68}_{-0.70}$	$-0.292^{+0.100}_{-0.083}$	0.030 ± 0.010	0.128 ± 0.010	$-0.800^{+0.045}_{-0.051}$	$-19.321^{+0.018}_{-0.019}$	$0.027^{+0.048}_{-0.026}$	$1.11^{+1.98}_{-1.07}$
Base 3 + CC	69.14 ± 0.70	-0.028 ± 0.048	0.027 ± 0.010	0.124 ± 0.010	$-0.946^{+0.052}_{-0.053}$	-19.385 ± 0.018	$0.041^{+0.059}_{-0.039}$	$1.64^{+2.36}_{-1.56}$
Base 3 + CC + R22	$70.19^{+0.60}_{-0.63}$	-0.033 ± 0.047	0.028 ± 0.010	$0.126^{+0.010}_{-0.009}$	$-0.974^{+0.051}_{-0.055}$	-19.360 ± 0.016	$0.035^{+0.054}_{-0.034}$	$1.42^{+2.19}_{-1.38}$

Tabla 8.5.2: Resumen de las distribuciones posteriores marginalizadas para los parámetros cosmológicos de los escenarios w VCDM2 y w VCDM2+ Ω_K , correspondiente al caso m libre, para distintos conjuntos de datos. Se presentan el MAP y los intervalos de credibilidad al 68 % para cada parámetro. El parámetro de viscosidad ζ_0 se calcula mediante la Ec. (4.1.11).

Datos	H_0 (km s ⁻¹ Mpc ⁻¹)	$\Omega_{K,0}$	$\Omega_b h^2$	$\Omega_{\text{cc}} h^2$	w_0	M	m	$\tilde{\zeta}_0$	$\zeta_0 \times 10^6$ (Pas)
<i>w</i> VCDM2									
PPS	73.5 ± 1.1	–	0.024 ± 0.011	0.123 ± 0.011	–0.77 ^{+0.13} _{–0.12}	–19.247 ^{+0.034} _{–0.033}	–1.29 ^{+1.14} _{–0.70}	0.12 ^{+0.26} _{–0.11}	5.10 ^{+11.06} _{–4.68}
PPS + DESI	72.9 ± 1.1	–	0.032 ± 0.010	0.130 ± 0.010	–0.897 ± 0.050	–19.262 ± 0.032	–1.39 ^{+0.93} _{–0.59}	0.038 ^{+0.078} _{–0.037}	1.60 ^{+3.29} _{–1.36}
Base 2 + CC	69.79 ^{+0.78} _{–0.80}	–	0.022 ± 0.011	0.120 ± 0.011	–0.885 ^{+0.077} _{–0.073}	–19.368 ± 0.020	–1.21 ^{+1.03} _{–0.71}	0.13 ^{+0.18} _{–0.13}	5.25 ^{+7.27} _{–5.25}
Base 2 + CC + R22	70.77 ^{+0.68} _{–0.67}	–	0.023 ± 0.011	0.121 ± 0.011	–0.908 ^{+0.072} _{–0.071}	–19.344 ^{+0.018} _{–0.017}	–1.23 ^{+1.01} _{–0.71}	0.13 ^{+0.17} _{–0.12}	5.32 ^{+6.96} _{–4.92}
Base 3 + CC	69.14 ^{+0.68} _{–0.71}	–	0.025 ± 0.010	0.123 ± 0.010	–0.944 ^{+0.052} _{–0.050}	–19.387 ^{+0.017} _{–0.018}	–1.38 ^{+1.00} _{–0.58}	0.074 ^{+0.137} _{–0.072}	2.96 ^{+5.48} _{–2.88}
Base 3 + CC + R22	70.17 ^{+0.61} _{–0.63}	–	0.026 ^{+0.010} _{–0.009}	0.124 ^{+0.010} _{–0.009}	–0.981 ^{+0.052} _{–0.050}	–19.362 ± 0.016	–1.37 ^{+0.99} _{–0.62}	0.070 ^{+0.132} _{–0.068}	2.84 ^{+5.36} _{–2.76}
<i>w</i> VCDM2 + Ω_K									
PPS	73.3 ± 1.2	0.00 ^{+0.28} _{–0.23}	0.025 ^{+0.011} _{–0.012}	0.123 ^{+0.012} _{–0.011}	–0.73 ^{+0.25} _{–0.33}	–19.246 ^{+0.034} _{–0.035}	–1.21 ^{+1.19} _{–0.78}	0.11 ^{+0.24} _{–0.11}	4.67 ^{+10.18} _{–4.67}
PPS + DESI	72.9 ± 1.1	0.017 ^{+0.053} _{–0.052}	0.031 ± 0.010	0.130 ± 0.010	–0.904 ^{+0.059} _{–0.064}	–19.261 ± 0.033	–1.35 ^{+0.92} _{–0.62}	0.041 ^{+0.078} _{–0.039}	1.73 ^{+3.29} _{–1.65}
Base 2 + CC	70.48 ^{+0.86} _{–0.87}	–0.258 ^{+0.116} _{–0.099}	0.028 ± 0.010	0.126 ± 0.010	–0.782 ^{+0.054} _{–0.060}	–19.344 ± 0.023	–1.31 ^{+0.94} _{–0.66}	0.065 ^{+0.128} _{–0.062}	2.65 ^{+5.22} _{–2.53}
Base 2 + CC + R22	71.34 ^{+0.70} _{–0.71}	–0.297 ^{+0.102} _{–0.083}	0.029 ± 0.010	0.128 ± 0.010	–0.788 ^{+0.049} _{–0.054}	–19.322 ± 0.019	–1.33 ^{+0.93} _{–0.63}	0.056 ^{+0.113} _{–0.054}	2.31 ^{+4.67} _{–2.23}
Base 3 + CC	69.16 ^{+0.77} _{–0.73}	–0.029 ^{+0.050} _{–0.052}	0.026 ± 0.010	0.124 ± 0.010	–0.922 ^{+0.061} _{–0.062}	–19.384 ^{+0.019} _{–0.020}	–1.30 ^{+0.94} _{–0.68}	0.076 ^{+0.133} _{–0.074}	3.04 ^{+5.32} _{–2.96}
Base 3 + CC + R22	70.20 ^{+0.64} _{–0.65}	–0.035 ^{+0.048} _{–0.051}	0.027 ± 0.010	0.126 ± 0.010	–0.950 ± 0.059	–19.360 ± 0.017	–1.37 ^{+0.96} _{–0.61}	0.072 ^{+0.125} _{–0.070}	2.92 ^{+5.08} _{–2.84}

Tabla 8.5.3: Resumen de las distribuciones posteriores marginalizadas para los parámetros cosmológicos de los escenarios w_0w_a VCDM1 y w_0w_a VCDM1 + Ω_K , correspondientes al caso $m = 0$, para distintos conjuntos de datos. Se presentan el MAP y los intervalos de credibilidad al 68 % para cada parámetro. El parámetro de viscosidad ζ_0 se calcula mediante la Ec. (4.1.11).

Modelo	H_0 (km s ⁻¹ Mpc ⁻¹)	$\Omega_{K,0}$	$\Omega_{b,0}h^2$	$\Omega_{c,0}h^2$	w_0	w_a	M	$\tilde{\zeta}_0$	$\zeta_0 \times 10^6$ (Pas)
w_0w_a VCDM1									
PPS + DESI	73.0 ± 1.2	–	0.030 ± 0.011	0.128 ± 0.011	–0.917 ± 0.064	0.35 ^{+0.56} _{–0.60}	–19.260 ^{+0.034} _{–0.033}	0.034 ^{+0.065} _{–0.082}	1.44 ^{+2.75} _{–1.35}
PP + DESI	65.5 ^{+3.9} _{–4.0}	–	0.025 ± 0.011	0.123 ^{+0.011} _{–0.010}	–0.914 ^{+0.081} _{–0.071}	–0.15 ^{+0.60} _{–0.58}	–19.49 ± 0.13	0.075 ^{+0.126} _{–0.068}	2.84 ^{+4.78} _{–2.58}
Base 2 + CC	69.79 ^{+0.82} _{–0.83}	–	0.023 ± 0.012	0.121 ± 0.012	–0.90 ^{+0.12} _{–0.11}	0.51 ^{+0.61} _{–0.91}	–19.368 ± 0.022	0.14 ^{+0.24} _{–0.14}	5.64 ^{+9.69} _{–5.66}
Base 2 + CC + R22	70.80 ± 0.72	–	0.024 ± 0.012	0.122 ± 0.012	–0.93 ^{+0.12} _{–0.11}	0.51 ^{+0.66} _{–0.89}	–19.344 ± 0.019	0.14 ^{+0.24} _{–0.14}	5.74 ^{+9.83} _{–5.74}
Base 3 + CC	69.17 ± 0.72	–	0.025 ± 0.010	0.123 ± 0.010	–0.986 ^{+0.065} _{–0.059}	0.13 ^{+0.56} _{–0.49}	–19.387 ^{+0.017} _{–0.018}	0.061 ^{+0.081} _{–0.059}	2.44 ^{+3.24} _{–2.36}
Base 3 + CC + R22	70.25 ^{+0.63} _{–0.62}	–	0.025 ± 0.010	0.123 ± 0.010	–1.034 ^{+0.056} _{–0.057}	0.38 ^{+0.56} _{–0.50}	–19.363 ± 0.016	0.064 ^{+0.087} _{–0.062}	2.60 ^{+3.54} _{–2.52}
Base 4 + CC	66.83 ^{+0.84} _{–0.87}	–	0.024 ^{+0.011} _{–0.010}	0.122 ± 0.011	–0.902 ^{+0.064} _{–0.071}	0.07 ^{+0.58} _{–0.48}	–19.450 ^{+0.023} _{–0.022}	0.083 ^{+0.105} _{–0.079}	3.21 ^{+4.06} _{–3.06}
Base 4 + CC + R22	69.01 ^{+0.70} _{–0.71}	–	0.025 ± 0.011	0.123 ± 0.011	–1.003 ^{+0.059} _{–0.055}	0.47 ^{+0.56} _{–0.49}	–19.398 ^{+0.019} _{–0.018}	0.083 ^{+0.102} _{–0.078}	3.31 ^{+4.07} _{–3.12}
w_0w_a VCDM1 + Ω_K									
PPS + DESI	72.9 ^{+1.2} _{–1.1}	0.022 ^{+0.056} _{–0.055}	0.030 ± 0.011	0.129 ^{+0.010} _{–0.011}	–0.925 ^{+0.072} _{–0.073}	0.20 ^{+0.59} _{–0.63}	–19.260 ± 0.033	0.030 ^{+0.052} _{–0.029}	1.27 ^{+2.19} _{–1.22}
PP + DESI	65.5 ± 4.0	0.015 ^{+0.054} _{–0.053}	0.025 ± 0.011	0.123 ± 0.011	–0.912 ^{+0.083} _{–0.085}	–0.17 ^{+0.62} _{–0.61}	–19.48 ^{+0.13} _{–0.14}	0.074 ^{+0.113} _{–0.072}	2.80 ^{+4.29} _{–2.73}
Base 2 + CC	70.6 ± 1.0	–0.28 ^{+0.12} _{–0.10}	0.024 ± 0.013	0.122 ± 0.013	–0.77 ^{+0.15} _{–0.13}	0.59 ^{+0.39} _{–0.46}	–19.344 ^{+0.026} _{–0.027}	0.19 ^{+0.36} _{–0.18}	7.76 ^{+14.7} _{–7.36}
Base 2 + CC + R22	71.51 ^{+0.75} _{–0.78}	–0.318 ^{+0.107} _{–0.079}	0.024 ± 0.013	0.122 ^{+0.012} _{–0.013}	–0.77 ^{+0.16} _{–0.13}	0.64 ^{+0.32} _{–0.39}	–19.323 ± 0.020	0.18 ^{+0.38} _{–0.17}	7.45 ^{+15.73} _{–7.04}
Base 3 + CC	69.21 ^{+0.76} _{–0.72}	–0.027 ^{+0.050} _{–0.049}	0.025 ^{+0.011} _{–0.010}	0.124 ± 0.010	–0.958 ^{+0.062} _{–0.068}	0.23 ^{+0.51} _{–0.50}	–19.385 ^{+0.019} _{–0.018}	0.060 ^{+0.079} _{–0.058}	2.40 ^{+3.16} _{–2.32}
Base 3 + CC + R22	70.34 ± 0.64	–0.040 ^{+0.049} _{–0.050}	0.025 ^{+0.011} _{–0.010}	0.123 ^{+0.011} _{–0.010}	–0.995 ^{+0.062} _{–0.067}	0.46 ^{+0.50} _{–0.49}	–19.360 ± 0.016	0.062 ^{+0.098} _{–0.058}	2.52 ^{+3.99} _{–2.36}
Base 4 + CC	66.76 ^{+0.88} _{–0.87}	0.011 ± 0.054	0.024 ± 0.011	0.122 ^{+0.011} _{–0.010}	–0.909 ± 0.074	0.09 ^{+0.56} _{–0.55}	–19.451 ± 0.023	0.087 ^{+0.093} _{–0.075}	3.36 ^{+3.59} _{–2.90}
Base 4 + CC + R22	69.03 ^{+0.72} _{–0.73}	–0.018 ^{+0.050} _{–0.051}	0.025 ± 0.011	0.123 ± 0.011	–0.983 ^{+0.066} _{–0.068}	0.47 ^{+0.50} _{–0.48}	–19.397 ± 0.019	0.081 ^{+0.098} _{–0.076}	3.24 ^{+3.92} _{–3.04}

Tabla 8.5.4: Resumen de las distribuciones posteriores marginalizadas para los parámetros cosmológicos de los escenarios $w_0 w_a$ VCDM2 y $w_0 w_a$ VCDM2 + Ω_K , correspondientes al caso m libre, para distintos conjuntos de datos. Se presentan el MAP y los intervalos de credibilidad al 68 % para cada parámetro. El parámetro de viscosidad ζ_0 se calcula mediante la Ec. (4.1.11).

Datos	H_0 ($\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$)	$\Omega_{K,0}$	$\Omega_{b,0} h^2$	$\Omega_{\text{vac}} h^2$	w_0	w_a	M	m	$\tilde{\zeta}_0$	$\zeta_0 \times 10^6$ (Pas)
$w_0 w_a$ VCDM2										
PPS + DESI	73.0 ± 1.2	—	0.030 ± 0.011	$0.129^{+0.011}_{-0.012}$	$-0.897^{+0.076}_{-0.070}$	$0.25^{+0.59}_{-0.62}$	-19.259 ± 0.033	$-1.23^{+1.07}_{-0.68}$	$0.059^{+0.118}_{-0.057}$	$2.49^{+4.99}_{-2.41}$
PP + DESI	66.0 ± 3.9	—	0.025 ± 0.011	$0.123^{+0.010}_{-0.012}$	$-0.867^{+0.094}_{-0.083}$	$-0.23^{+0.59}_{-0.57}$	-19.47 ± 0.13	$-1.30^{+1.09}_{-0.60}$	$0.11^{+0.19}_{-0.10}$	$4.20^{+7.26}_{-3.83}$
Base 2 + CC + R22	70.78 ± 0.75	—	$0.023^{+0.013}_{-0.012}$	0.121 ± 0.012	$-0.88^{+0.13}_{-0.12}$	$0.17^{+0.84}_{-0.87}$	-19.344 ± 0.020	$-0.9^{+1.3}_{-1.0}$	$0.20^{+0.26}_{-0.19}$	$8.19^{+10.64}_{-7.78}$
Base 3 + CC	$69.18^{+0.74}_{-0.73}$	—	$0.025^{+0.011}_{-0.010}$	0.123 ± 0.011	$-0.948^{+0.079}_{-0.077}$	$0.08^{+0.54}_{-0.52}$	-19.386 ± 0.018	$-1.17^{+1.04}_{-0.69}$	$0.096^{+0.168}_{-0.090}$	$3.84^{+6.73}_{-3.63}$
Base 3 + CC + R22	$70.24^{+0.63}_{-0.62}$	—	$0.024^{+0.011}_{-0.010}$	$0.123^{+0.010}_{-0.011}$	$-0.999^{+0.074}_{-0.066}$	0.30 ± 0.53	$-19.363^{+0.017}_{-0.015}$	$-1.19^{+1.07}_{-0.68}$	$0.091^{+0.169}_{-0.087}$	$3.70^{+6.87}_{-3.57}$
Base 4 + CC	$66.81^{+0.88}_{-0.87}$	—	0.024 ± 0.011	0.122 ± 0.011	-0.860 ± 0.082	$-0.01^{+0.53}_{-0.52}$	$-19.451^{+0.023}_{-0.022}$	$-1.21^{+1.06}_{-0.67}$	$0.12^{+0.18}_{-0.12}$	$4.64^{+6.96}_{-4.64}$
Base 4 + CC + R22	$68.98^{+0.72}_{-0.71}$	—	0.024 ± 0.011	0.122 ± 0.011	$-0.961^{+0.079}_{-0.073}$	$0.34^{+0.51}_{-0.52}$	$-19.398^{+0.018}_{-0.019}$	$-1.13^{+1.08}_{-0.71}$	$0.11^{+0.18}_{-0.11}$	$4.39^{+7.19}_{-4.39}$
$w_0 w_a$ VCDM2 + Ω_K										
PPS + DESI	73.0 ± 1.2	$0.022^{+0.058}_{-0.056}$	0.030 ± 0.011	0.129 ± 0.011	$-0.904^{+0.078}_{-0.083}$	$0.10^{+0.61}_{-0.65}$	$-19.261^{+0.035}_{-0.034}$	$-1.24^{+1.00}_{-0.68}$	$0.053^{+0.104}_{-0.051}$	$2.24^{+4.39}_{-2.15}$
PP + DESI	66.1 ± 3.9	0.015 ± 0.055	0.025 ± 0.011	$0.123^{+0.011}_{-0.010}$	$-0.868^{+0.093}_{-0.085}$	-0.25 ± 0.60	$-19.47^{+0.13}_{-0.12}$	$-1.27^{+1.09}_{-0.69}$	$0.10^{+0.18}_{-0.10}$	$3.83^{+6.83}_{-3.52}$
Base 2 + CC	70.6 ± 1.0	$-0.27^{+0.13}_{-0.11}$	0.025 ± 0.013	0.122 ± 0.013	$-0.76^{+0.14}_{-0.12}$	$0.43^{+0.46}_{-0.41}$	-19.344 ± 0.027	$-0.7^{+1.4}_{-1.1}$	$0.20^{+0.31}_{-0.20}$	$8.17^{+12.67}_{-8.17}$
Base 2 + CC + R22	$71.46^{+0.77}_{-0.78}$	$-0.313^{+0.095}_{-0.082}$	0.025 ± 0.013	0.123 ± 0.013	$-0.771^{+0.115}_{-0.099}$	$0.46^{+0.41}_{-0.44}$	-19.324 ± 0.020	$-0.8^{+1.3}_{-1.1}$	$0.19^{+0.29}_{-0.19}$	$7.86^{+11.99}_{-7.86}$
Base 3 + CC	$69.25^{+0.73}_{-0.75}$	-0.028 ± 0.051	$0.025^{+0.011}_{-0.010}$	$0.124^{+0.010}_{-0.011}$	$-0.930^{+0.076}_{-0.071}$	$0.17^{+0.49}_{-0.52}$	$-19.384^{+0.018}_{-0.019}$	$-1.17^{+1.08}_{-0.69}$	$0.082^{+0.158}_{-0.078}$	$3.20^{+6.33}_{-3.13}$
Base 3 + CC + R22	$70.34^{+0.64}_{-0.66}$	$-0.041^{+0.051}_{-0.050}$	$0.025^{+0.011}_{-0.010}$	$0.123^{+0.011}_{-0.010}$	$-0.965^{+0.071}_{-0.076}$	$0.38^{+0.47}_{-0.49}$	-19.360 ± 0.016	$-1.15^{+1.11}_{-0.70}$	$0.080^{+0.162}_{-0.081}$	$3.50^{+6.59}_{-3.30}$
Base 4 + CC	66.76 ± 0.90	0.011 ± 0.055	0.024 ± 0.011	0.122 ± 0.011	$-0.860^{+0.085}_{-0.087}$	$-0.03^{+0.53}_{-0.54}$	$-19.451^{+0.023}_{-0.024}$	$-1.18^{+1.06}_{-0.68}$	$0.12^{+0.18}_{-0.12}$	$4.64^{+6.96}_{-4.64}$
Base 4 + CC + R22	$69.05^{+0.73}_{-0.74}$	$-0.022^{+0.052}_{-0.050}$	$0.024^{+0.011}_{-0.010}$	$0.122^{+0.010}_{-0.011}$	$-0.943^{+0.078}_{-0.081}$	0.34 ± 0.49	-19.395 ± 0.019	$-1.09^{+1.10}_{-0.71}$	$0.100^{+0.170}_{-0.097}$	$4.00^{+6.79}_{-3.88}$

Tabla 8.5.5: Comparación entre los modelos cosmológicos viscosos w VCDM y w VCDM + Ω_K en el formalismo de Eckart y el modelo estándar Λ CDM.

Datos	$\chi^2_{\min,i}$	$\Delta\chi^2_{\min}$	AIC _i	Δ AIC	BIC _i	Δ BIC	DIC _i	Δ DIC	$\ln \mathcal{E}_i$	$\ln \mathcal{B}_{0i}$
<i>w</i> VCDM1										
PPS	1451.73	0.30	1465.73	-5.70	1503.62	-21.94	1459.42	-0.61	-2.41	-2.08
PPS + DESI	1461.03	4.65	1475.03	-1.35	1512.98	-17.62	1471.38	2.22	-6.98	1.72
Base 2 + CC	1509.16	4.82	1523.16	-1.18	1561.31	-17.53	1517.03	2.80	-3.95	-1.05
Base 2 + CC + R22	1515.90	2.86	1529.90	-3.14	1568.05	-19.49	1523.79	0.67	-4.18	-0.96
Base 3 + CC	1526.83	1.26	1540.83	-4.74	1579.03	-21.11	1536.72	-0.78	-7.42	1.11
Base 3 + CC + R22	1537.09	0.08	1551.09	-5.92	1589.29	-22.29	1546.98	-1.94	-7.40	1.06
<i>w</i> VCDM1 + Ω_K										
PPS	1451.73	0.30	1467.73	-7.70	1511.03	-29.35	1451.73	7.08	-4.10	-0.39
PPS + DESI	1461.14	4.54	1477.14	-3.46	1520.51	-25.15	1473.48	0.12	-10.07	4.81
Base 2 + CC	1500.83	13.15	1516.83	5.15	1560.43	-16.65	1510.96	8.87	-6.93	1.93
Base 2 + CC + R22	1503.39	15.37	1519.39	7.37	1563.00	-14.44	1513.92	10.54	-7.34	2.20
Base 3 + CC	1526.11	1.98	1542.11	-6.02	1585.77	-27.85	1537.78	-1.84	-10.86	4.55
Base 3 + CC + R22	1535.83	1.34	1551.83	-6.66	1595.49	-28.49	1547.69	-2.65	-11.02	4.68
<i>w</i> VCDM2										
PPS	1451.72	0.31	1467.72	-7.69	1511.02	-29.34	1458.97	-0.16	-0.77	-3.72
PPS + DESI	1461.09	4.59	1477.09	-3.41	1520.45	-25.09	1471.51	2.09	-5.33	0.07
Base 2 + CC	1509.07	4.91	1525.07	-3.09	1568.67	-24.89	1517.07	2.76	-2.50	-2.50
Base 2 + CC + R22	1515.89	2.87	1531.89	-5.13	1575.49	-26.93	1523.89	0.57	-2.76	-2.38
Base 3 + CC	1526.86	1.23	1542.86	-6.77	1586.52	-28.60	1536.88	-0.94	-5.74	-0.57
Base 3 + CC + R22	1537.02	0.15	1553.02	-7.85	1596.69	-29.69	1547.00	-1.96	-5.90	-0.44
<i>w</i> VCDM2 + Ω_K										
PPS	1451.73	0.30	1469.73	-9.70	1518.44	-36.76	-	-	-2.84	-1.65
PPS + DESI	1461.34	4.34	1479.34	-5.66	1528.13	-32.77	1473.53	0.07	-8.50	3.24
Base 2 + CC	1500.91	13.07	1518.91	3.07	1567.96	-24.18	1511.07	8.76	-5.37	0.37
Base 2 + CC + R22	1503.40	15.36	1521.40	5.36	1570.46	-21.90	1513.95	10.51	-5.52	0.38
Base 3 + CC	1526.05	2.04	1544.05	-7.96	1593.17	-35.25	1537.87	-1.93	-8.96	2.65
Base 3 + CC + R22	1535.88	1.29	1553.88	-8.71	1603.00	-36.00	1547.41	-2.37	-9.19	2.85

Nota. Se utilizan criterios de información (DIC, BIC y AIC), la evidencia bayesiana ($\ln \mathcal{E}$) y el factor de Bayes ($\ln \mathcal{B}_{0i}$). Todas las cantidades Δ se calculan respecto al modelo estándar Λ CDM para la misma combinación de datos. En particular, $\Delta\chi^2_{\min} = \chi^2_{\min,\Lambda\text{CDM}} - \chi^2_{\min,i}$, $\Delta\text{IC} = \text{IC}_{\Lambda\text{CDM}} - \text{IC}_i$ y $\ln \mathcal{B}_{0i} = \ln \mathcal{E}_{\Lambda\text{CDM}} - \ln \mathcal{E}_i$. Valores de $\Delta\text{IC} > 2$ indican preferencia por el modelo viscoso, mientras que $\ln \mathcal{B}_{0i} > 1$ favorece al modelo Λ CDM.

Tabla 8.5.6: Comparación entre los modelos cosmológicos viscosos w_0w_a VCDM y w_0w_a VCDM + Ω_K en el formalismo de Eckart y el modelo estándar Λ CDM.

Datos	$\chi^2_{\min,i}$	$\Delta\chi^2_{\min}$	AIC _i	Δ AIC	BIC _i	Δ BIC	DIC _i	Δ DIC	$\ln \mathcal{E}_i$	$\ln \mathcal{B}_{0i}$
<i>w_0w_aVCDM1</i>										
PPS + DESI	1460.80	4.90	1476.80	-1.10	1520.16	-17.36	1467.68	6.09	-5.34	2.08
PP + DESI	1411.56	4.94	1427.56	-1.06	1470.60	-17.20	1420.26	1.39	-3.07	1.36
Base 3 + CC	1526.91	1.19	1542.91	-4.81	1586.57	-21.18	1536.82	-0.76	-6.05	2.19
Base 3 + CC + R22	1537.02	0.15	1553.02	-5.85	1596.69	-22.23	1545.86	-0.79	-6.34	2.43
Base 4 + CC	1444.76	8.36	1460.76	2.36	1504.10	-13.89	1454.68	6.35	-5.93	2.22
Base 4 + CC + R22	1468.35	1.54	1484.35	-4.46	1527.70	-20.71	1475.84	1.97	-6.08	2.28
<i>w_0w_aVCDM1 + Ω_K</i>										
PPS + DESI	1461.14	4.56	1479.14	-3.44	1527.93	-25.13	1471.26	2.51	-8.42	5.16
PP + DESI	1411.76	4.74	1429.76	-3.26	1478.18	-24.78	1422.17	-0.52	-6.22	4.51
Base 3 + CC	1526.72	1.38	1544.72	-6.62	1593.84	-28.45	-	-	-	-
Base 3 + CC + R22	1535.57	1.60	1553.57	-6.40	1602.69	-28.23	1544.56	0.51	-9.49	5.58
Base 4 + CC	1444.91	8.21	1462.91	0.21	1511.67	-21.46	1456.15	4.88	-7.92	4.21
Base 4 + CC + R22	1468.10	1.79	1486.10	-6.21	1534.87	-27.88	1476.92	0.89	-9.27	5.47
<i>w_0w_aVCDM2</i>										
PPS + DESI	1460.46	5.24	1478.46	-2.76	1527.24	-24.44	1470.16	3.61	-1.48	-1.78
PP + DESI	1410.23	6.27	1428.23	-1.73	1476.65	-23.25	1421.22	0.43	-3.82	2.11
Base 3 + CC	1526.99	1.11	1544.99	-6.89	1594.12	-28.73	1538.38	-2.32	-3.86	0.00
Base 3 + CC + R22	1536.97	0.20	1554.97	-7.80	1604.09	-29.63	1547.45	-2.38	-2.56	-1.35
Base 4 + CC	1444.60	8.52	1462.60	0.52	1511.37	-21.16	1456.23	4.80	-4.47	0.76
Base 4 + CC + R22	1468.23	1.66	1486.23	-6.34	1535.00	-28.01	1478.61	-0.80	-3.47	-0.33
<i>w_0w_aVCDM2 + Ω_K</i>										
PPS + DESI	1460.79	4.91	1480.79	-5.09	1535.00	-32.20	1473.12	0.65	-6.83	3.57
PP + DESI	1411.59	4.91	1431.59	-5.09	1485.38	-31.98	1423.48	-1.83	-2.33	0.62
Base 3 + CC	1526.03	2.07	1546.03	-7.93	1600.60	-35.21	1537.98	-1.92	-7.37	3.51
Base 3 + CC + R22	1535.63	1.54	1555.63	-8.46	1610.22	-35.76	1546.51	-1.44	-7.78	3.87
Base 4 + CC	1444.85	8.27	1464.85	-1.73	1519.03	-28.82	1457.74	3.29	-6.71	3.00
Base 4 + CC + R22	1468.02	1.87	1488.02	-8.13	1542.21	-35.22	1479.43	-1.62	-7.10	3.30

Nota. Se utilizan criterios de información (DIC, BIC y AIC), la evidencia bayesiana ($\ln \mathcal{E}$) y el factor de Bayes ($\ln \mathcal{B}_{0i}$). Todas las cantidades Δ se calculan respecto al modelo estándar Λ CDM para la misma combinación de datos. En particular, $\Delta\chi^2_{\min} = \chi_{\min,\Lambda\text{CDM}} - \chi_{\min,i}$, $\Delta\text{IC} = \text{IC}_{\Lambda\text{CDM}} - \text{IC}_i$ y $\ln \mathcal{B}_{0i} = \ln \mathcal{E}_{\Lambda\text{CDM}} - \ln \mathcal{E}_i$. Valores de $\Delta\text{IC} > 2$ indican preferencia por el modelo viscoso, mientras que $\ln \mathcal{B}_{0i} > 1$ favorece al modelo Λ CDM.

Tabla 8.5.7: Resumen de las restricciones sobre los parámetros y de la comparación entre los modelos con $\tilde{\zeta}_0 = 0$: w CDM y w CDM + Ω_K , al 68 % NC.

Datos	H_0 ($\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$)	Ω_{K0}	w_0	$\chi^2_{\min}$	$\Delta\chi^2_{\min}$	AIC	ΔAIC	BIC	ΔBIC	DIC	ΔAIC	$\ln \mathcal{E}_i$	$\ln \mathcal{B}_{0i}$
<i>w</i> CDM													
PPS + DESI	$73.0^{+1.1}_{-1.0}$	–	-0.910 ± 0.043	1461.04	4.64	1473.04	0.64	1505.57	-10.21	1470.93	2.67	-4.82	-0.44
Base 2 + CC	$69.84^{+0.74}_{-0.76}$	–	-0.924 ± 0.044	1509.16	4.82	1521.16	0.82	1553.86	-10.08	1517.06	2.77	-2.61	-2.39
Base 2 + CC + R22	70.81 ± 0.64	–	$-0.949^{+0.043}_{-0.042}$	1515.91	2.85	1527.91	-1.15	1560.61	-12.05	1523.83	0.63	-2.79	-2.35
Base 3 + CC	$69.18^{+0.68}_{-0.69}$	–	-0.964 ± 0.037	1526.83	1.26	1538.83	-2.74	1571.57	-13.65	1536.68	-0.74	-5.72	-0.59
Base 3 + CC + R22	$70.19^{+0.60}_{-0.59}$	–	$-0.999^{+0.036}_{-0.034}$	1537.20	-0.03	1549.20	-4.03	1581.94	-14.94	1547.02	-1.98	-5.94	-0.40
<i>w</i> CDM + Ω_K													
PPS + DESI	73.0 ± 1.1	$0.014^{+0.050}_{-0.051}$	$-0.917^{+0.055}_{-0.056}$	1461.07	4.61	1475.07	-1.39	1513.02	-17.66	1472.93	0.67	-8.30	3.04
Base 2 + CC	$70.64^{+0.80}_{-0.83}$	$-0.292^{+0.100}_{-0.081}$	$-0.793^{+0.042}_{-0.049}$	1500.88	13.10	1514.88	7.10	1553.03	-9.25	1509.95	9.88	-5.55	0.55
Base 2 + CC + R22	$71.44^{+0.66}_{-0.68}$	$-0.323^{+0.090}_{-0.064}$	$-0.798^{+0.039}_{-0.044}$	1503.30	15.46	1517.30	9.46	1555.45	-6.89	1512.92	11.54	-5.82	0.68
Base 3 + CC	69.22 ± 0.69	$-0.037^{+0.046}_{-0.047}$	$-0.936^{+0.047}_{-0.048}$	1526.10	1.99	1540.10	-4.01	1578.30	-20.38	1537.65	-1.71	-9.29	2.98
Base 3 + CC + R22	$70.24^{+0.59}_{-0.61}$	$-0.044^{+0.046}_{-0.045}$	$-0.963^{+0.046}_{-0.049}$	1536.03	1.14	1550.03	-4.86	1588.23	-21.23	1547.56	-2.52	-9.39	3.05
Λ CDM ($\zeta_0 = 0$)													
PPS + DESI	$73.4^{+1.1}_{-1.0}$	–	–	1465.68	0	1473.68	0	1495.36	0	1473.60	0	-5.26	0
Base 2 + CC	$70.32^{+0.71}_{-0.70}$	–	–	1513.98	0	1521.98	0	1543.78	0	1519.83	0	-5.00	0
Base 2 + CC + R22	$71.08^{+0.60}_{-0.61}$	–	–	1518.76	0	1526.76	0	1548.56	0	1524.46	0	-5.14	0
Base 3 + CC	$69.58^{+0.54}_{-0.55}$	–	–	1528.09	0	1536.09	0	1557.92	0	1535.94	0	-6.31	0
Base 3 + CC + R22	$70.20^{+0.49}_{-0.48}$	–	–	1537.17	0	1545.17	0	1567.00	0	1545.04	0	-6.34	0

Tabla 8.5.8: Resumen de las restricciones sobre los parámetros y de la comparación entre los modelos con $\zeta_0 = 0$: $w_0 w_a$ CDM, $w_0 w_a$ CDM + Ω_K , y Λ CDM al 68 % NC.

Datos	H_0 (km s ⁻¹ Mpc ⁻¹)	Ω_K	w_0	w_a	$\chi^2_{\min}$	$\Delta\chi^2_{\min}$	AIC	Δ AIC	BIC	Δ BIC	DIC	Δ DIC	ln $\mathcal{E}_i$	ln $\mathcal{B}_i$
<i>$w_0 w_a$CDM</i>														
PPS + DESI	$73.0^{+1.2}_{-1.1}$	-	$-0.911^{+0.065}_{-0.061}$	$0.07^{+0.46}_{-0.49}$	1460.79	4.91	1474.79	0.91	1512.73	-9.93	1471.77	2.00	-4.28	1.02
PP + DESI	$68.2^{+3.5}_{-3.2}$	-	$-0.893^{+0.067}_{-0.063}$	$-0.21^{+0.47}_{-0.45}$	1411.55	4.95	1425.55	0.95	1463.21	-9.81	1420.79	0.86	-2.70	0.99
Base 3 + CC	$69.16^{+0.69}_{-0.70}$	-	$-0.961^{+0.060}_{-0.056}$	$-0.01^{+0.39}_{-0.41}$	1526.90	1.20	1540.90	-2.80	1579.10	-13.71	1538.15	-2.09	-3.29	-0.57
Base 3 + CC + R22	$70.26^{+0.60}_{-0.62}$	-	$-1.014^{+0.056}_{-0.051}$	$0.16^{+0.38}_{-0.40}$	1536.98	0.19	1550.98	-3.81	1589.18	-14.72	1548.14	-3.07	-5.38	1.47
Base 4 + CC	66.83 ± 0.85	-	$-0.886^{+0.062}_{-0.060}$	$-0.10^{+0.37}_{-0.40}$	1444.77	8.35	1458.77	4.35	1496.70	-6.49	1456.10	4.93	-5.21	1.50
Base 4 + CC + R22	$68.99^{+0.70}_{-0.68}$	-	$-0.982^{+0.054}_{-0.051}$	$0.17^{+0.36}_{-0.38}$	1468.39	1.50	1482.39	-2.50	1520.32	-13.33	1479.46	-1.65	-5.36	1.56
<i>$w_0 w_a$CDM + Ω_K</i>														
PPS + DESI	$73.0^{+1.2}_{-1.1}$	$0.019^{+0.055}_{-0.056}$	-0.910 ± 0.072	$0.03^{+0.49}_{-0.55}$	1461.04	4.66	1477.03	-1.33	1520.40	-17.60	1473.15	0.62	-7.46	4.20
PP + DESI	$68.4^{+3.7}_{-3.5}$	$0.009^{+0.055}_{-0.053}$	$-0.892^{+0.076}_{-0.073}$	-0.22 ± 0.51	1411.61	4.89	1427.61	-1.11	1470.65	-17.25	1422.93	-1.28	-6.26	4.55
Base 3 + CC	$69.24^{+0.73}_{-0.71}$	$-0.035^{+0.048}_{-0.049}$	$-0.940^{+0.060}_{-0.057}$	$0.07^{+0.38}_{-0.39}$	1526.22	1.88	1542.22	-4.12	1585.88	-20.49	1538.59	-2.53	-8.63	4.77
Base 3 + CC + R22	$70.33^{+0.64}_{-0.62}$	$-0.048^{+0.049}_{-0.048}$	$-0.977^{+0.054}_{-0.057}$	$0.26^{+0.34}_{-0.38}$	1535.51	1.66	1551.51	-4.34	1595.18	-20.72	1547.62	-2.55	-9.06	5.15
Base 4 + CC	$66.81^{+0.88}_{-0.86}$	$-0.001^{+0.050}_{-0.054}$	$-0.879^{+0.065}_{-0.067}$	$-0.09^{+0.39}_{-0.41}$	1444.95	8.17	1460.95	2.17	1504.30	-14.09	1457.81	3.22	-8.46	4.75
Base 4 + CC + R22	$69.04^{+0.73}_{-0.69}$	$-0.030^{+0.049}_{-0.047}$	$-0.960^{+0.060}_{-0.058}$	$0.22^{+0.37}_{-0.37}$	1467.94	1.95	1483.94	-4.05	1527.29	-20.30	1480.46	-2.65	-8.58	4.78
<i>ΛCDM ($\zeta_0 = 0$)</i>														
PPS + DESI	$73.2^{+1.1}_{-1.0}$	-	-	-	1465.70	0	1475.70	0	1502.80	0	1473.77	0	-3.26	0
PP + DESI	$68.6^{+3.1}_{-3.0}$	-	-	-	1416.50	0	1426.50	0	1453.40	0	1421.65	0	-1.71	0
Base 3 + CC	$69.59^{+0.52}_{-0.54}$	-	-	-	1528.10	0	1538.10	0	1565.39	0	1536.06	0	-3.86	0
Base 3 + CC + R22	$70.21^{+0.47}_{-0.48}$	-	-	-	1537.17	0	1547.17	0	1574.46	0	1545.07	0	-3.91	0
Base 4 + CC	$68.21^{+0.61}_{-0.63}$	-	-	-	1453.12	0	1463.12	0	1490.21	0	1461.03	0	-3.71	0
Base 4 + CC + R22	69.29 ± 0.54	-	-	-	1469.89	0	1479.89	0	1506.99	0	1477.81	0	-3.80	0

Capítulo 9

Resultados y análisis de modelos Λ_v CDM en la teoría de Israel-Stewart

En este capítulo se presentan y analizan los valores inferidos de los parámetros cosmológicos en modelos con viscosidad de volumen y constante cosmológica en el formalismo de Israel–Stewart, a partir de datos observacionales. Los modelos considerados se resumen en la Sección 4.2.2 y en la Tabla 4.2.1.

Se estudian diez modelos contruidos a partir del *ansatz* introducido en la Ec. (4.1.10); seis corresponden al formalismo Israel–Stewart truncado (IST), mientras que los cuatro restantes se definen dentro del formalismo Israel–Stewart completo (ISC). En ambos escenarios se analizan tanto modelos espacialmente planos como extensiones que incorporan curvatura espacial. Asimismo, se consideran tres posibilidades para el índice de viscosidad: el caso constante $m = 0$, el caso general con m libre y el caso particular $m = 1/2$. Finalmente, se lleva a cabo un análisis comparativo de las estimaciones de los parámetros cosmológicos obtenidas para cada escenario frente al modelo estándar Λ CDM.

Así como en los Caps. 7 y 8, la inferencia de los parámetros se realiza mediante un análisis bayesiano, empleando el muestreador MCMC invariante bajo transformaciones afines del paquete de Python `emcee` (Foreman-Mackey et al., 2013). Sin embargo, debido a la mayor complejidad del modelo en comparación con los casos previamente analizados, la configuración del muestreo considera 5000 caminantes y 1000 pasos por caminante, lo que permite una exploración más eficiente del espacio de parámetros y favorece la obtención de muestras menos correlacionadas. La convergencia se evalúa descartando una fase inicial de la cadena, equivalente a 5 veces el mayor tiempo de autocorrelación entre todos los parámetros libres. La verosimilitud se evalúa utilizando los conjuntos de datos PPS y DESI implementados mediante la versión pública de

Tabla 9.0.1: Parámetros libres de los modelos analizados y las distribuciones previas adoptadas.

Modelos	Espacio de parámetros	Distribuciones previas
$m = 0$	Λ vCDM1 $\Theta = \{H_0, \Omega_{b,0}h^2, \Omega_{vc,0}h^2, M, \epsilon, \tilde{\beta}_0\}$	$\pi(\Omega_{vc,0}h^2): \mathcal{N}(0.12, 0.01)$
	Λ vCDM1 + Ω_K $\Theta = \{H_0, \Omega_{K,0}, \Omega_{b,0}h^2, \Omega_{vc,0}h^2, M, \epsilon, \tilde{\beta}_0\}$	$\pi(\Omega_{b,0}h^2): \mathcal{N}(0.022, 0.01)$
m libre	Λ vCDM2 $\Theta = \{H_0, \Omega_{b,0}h^2, \Omega_{vc,0}h^2, M, \epsilon, \tilde{\beta}_0\}$	$\pi(\tilde{\beta}_0): \mathcal{U}(0, 10)$
	Λ vCDM2 + Ω_K $\Theta = \{H_0, \Omega_{K,0}, \Omega_{b,0}h^2, \Omega_{vc,0}h^2, M, \epsilon, m, \tilde{\beta}_0\}$	$\pi(m): \mathcal{U}(-2, 2)$
$m = 1/2$	Λ vCDM3 $\Theta = \{H_0, \Omega_{b,0}h^2, \Omega_{vc,0}h^2, M, \epsilon, \tilde{\beta}_0\}$	$\pi(\epsilon): \mathcal{U}(0, 1)$
	Λ vCDM3 + Ω_K $\Theta = \{H_0, \Omega_{K,0}, \Omega_{b,0}h^2, \Omega_{vc,0}h^2, M, \epsilon, \tilde{\beta}_0\}$	$\pi(H_0): \mathcal{U}(30, 99)$
		$\pi(\Omega_{K,0}): \mathcal{U}(-0.4, 0.4)$ $\pi(M): \mathcal{U}(-30, -5)$

CosmoSIS¹ (Zuntz et al., 2015). Las distribuciones posteriores marginalizadas de los parámetros, junto con sus contornos de credibilidad, se obtienen utilizando el paquete ChainConsumer (Hinton, 2016). En el muestreo MCMC se adoptan distribuciones previas gaussianas $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ y uniformes $\mathcal{U}(a, b)$. Las distribuciones previas asociadas a cada parámetro libre se presentan en la Tabla 9.0.1 y se adoptan de manera consistente en todo el análisis. El espacio de parámetros incluye el parámetro adimensional $\tilde{\beta}_0$, que controla la intensidad efectiva del término viscoso, y el coeficiente de compresibilidad adiabática ϵ , asociado a la escala de relajación del formalismo.

El conjunto de datos considerado incluye CC, mediciones de las BAO (HBAO y DESI), SNe Ia (PPS), así como R22. A partir de los datos considerados, se definen las combinaciones **Base 2** (HBAO + PPS) y **Base 3** (HBAO + PPS + DESI), cuyas funciones χ^2 conjuntas asociadas están dadas por

$$\begin{aligned}\chi_{\text{Base2}}^2 &= \chi_{\text{HBAO}}^2 + \chi_{\text{PPS}}^2, \\ \chi_{\text{Base3}}^2 &= \chi_{\text{HBAO}}^2 + \chi_{\text{PPS}}^2 + \chi_{\text{DESI}}^2.\end{aligned}\tag{9.0.1}$$

Adicionalmente, se analizan las restricciones conjuntas obtenidas al incorporar CC y R22 a cada una de las combinaciones base, dando lugar a los conjuntos: Base 2 + CC + R22 y Base 3 + CC + R22.

¹<https://cosmosis.readthedocs.io/en/latest/>

9.1. Formalismo de Israel–Stewart truncado

9.1.1. Caso con $m = 0$

En este escenario se asume un coeficiente de viscosidad constante, lo que implica que la contribución viscosa no depende explícitamente de la densidad de energía del fluido. Los resultados para los modelos Λ vCDM1-IST y Λ vCDM1-IST + Ω_K se presentan en la Tabla 9.5.1 donde se reportan los valores MAP y los intervalos de credibilidad al 68 % para cada parámetro. Los contornos bidimensionales al 68 % y 95 % NC, junto con las distribuciones posteriores marginalizadas unidimensionales de los parámetros libres, se muestran en las Figs. 9.1.1 y 9.1.2.

El parámetro de Hubble H_0 muestra que la compilaciones PPS arroja valores altos y consistentes entre sí, tanto en la geometría plana como en la no plana: $H_0 = 73.7 \pm 1.1 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Al incluir DESI, el valor se mantiene esencialmente constante ($H_0 \sim 73.6 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ para PPS + DESI). En contraste, cuando se combinan con CC, el valor de H_0 desciende; por ejemplo, $H_0 = 68.93 \pm 0.44 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (Base 2 + CC, Λ vCDM-IST). La inclusión de R22 aumenta estos valores,

$$H_0 = 69.40^{+0.40}_{-0.39} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (\text{Base 2} + \text{CC} + \text{R22}), \quad (9.1.1a)$$

$$H_0 = 69.44^{+0.39}_{-0.40} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (\text{Base 3} + \text{CC} + \text{R22}). \quad (9.1.1b)$$

Al permitir curvatura espacial, el valor de H_0 aumenta ligeramente, obteniéndose

$$H_0 = 70.26^{+0.48}_{-0.47} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (\text{Base 2} + \text{CC} + \text{R22}), \quad (9.1.2a)$$

$$H_0 = 69.72 \pm 0.42 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (\text{Base 3} + \text{CC} + \text{R22}). \quad (9.1.2b)$$

El parámetro de curvatura $\Omega_{K,0}$ muestra una clara dependencia del conjunto de datos empleado. Cuando se excluyen los datos de DESI, se observa una preferencia por curvatura negativa ($\Omega_{K,0} > 0$), la cual se refuerza al incluir R22, obteniéndose $\Omega_{K,0} = 0.117^{+0.040}_{-0.039}$ para Base 2 + CC + R22, lo que corresponde a una tensión de 2.96σ respecto de la planitud espacial. En contraste, al incluir DESI, los valores de $\Omega_{K,0}$ resultan compatibles con la planitud dentro de 1σ ; por ejemplo,

$$\Omega_{K,0} = 0.023^{+0.036}_{-0.033} \quad (\text{PPS} + \text{DESI}). \quad (9.1.3)$$

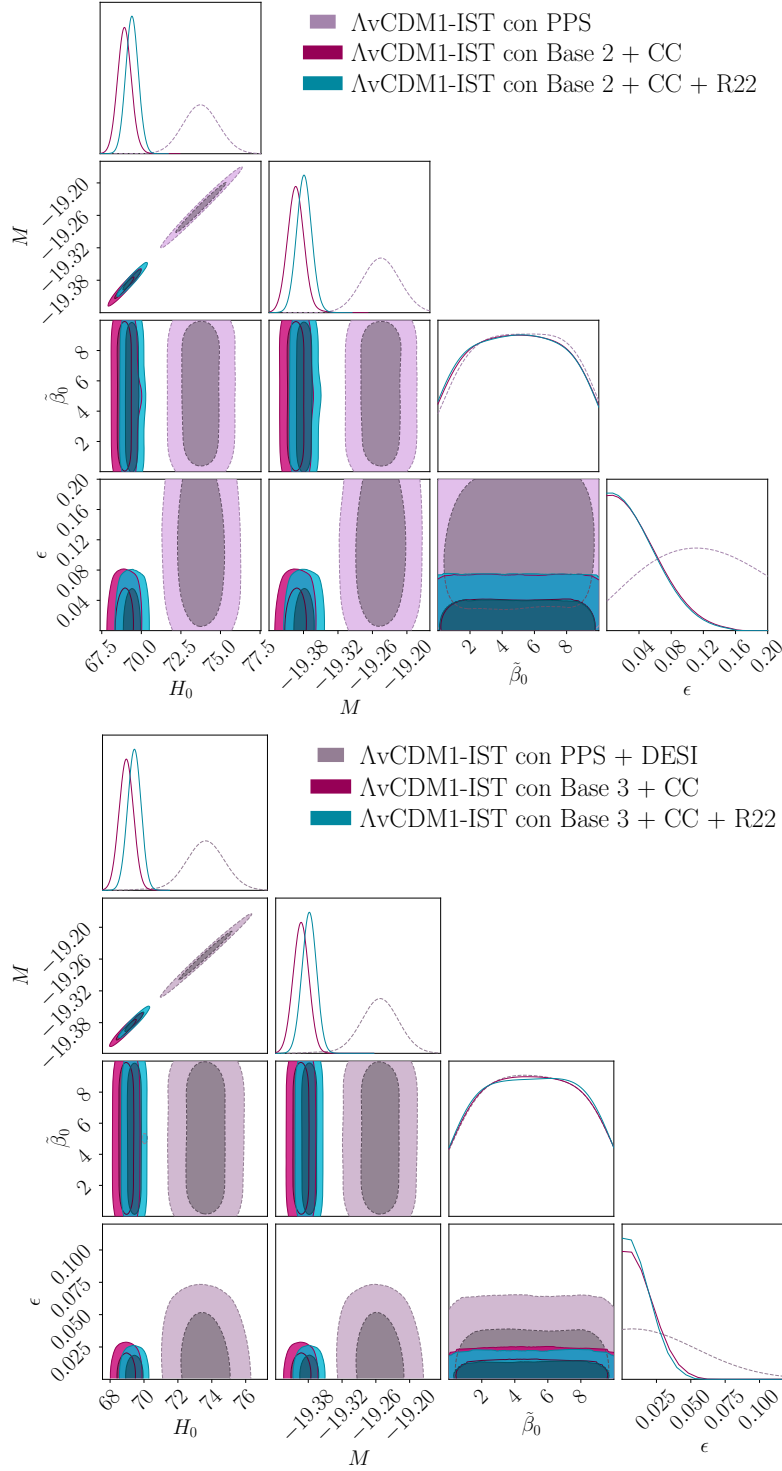


Figura 9.1.1: Distribuciones posteriores de los parámetros cosmológicos para el modelo Λ vCDM1-IST con viscosidad constante. *Panel superior:* conjuntos de datos PPS, Base 2, CC y R22. *Panel inferior:* conjuntos de datos PPS + DESI, Base 3, CC y R22. Los contornos muestran regiones de credibilidad en 2D al 68 % y 95 %, junto con las distribuciones posteriores marginalizadas en 1D de cada parámetro.

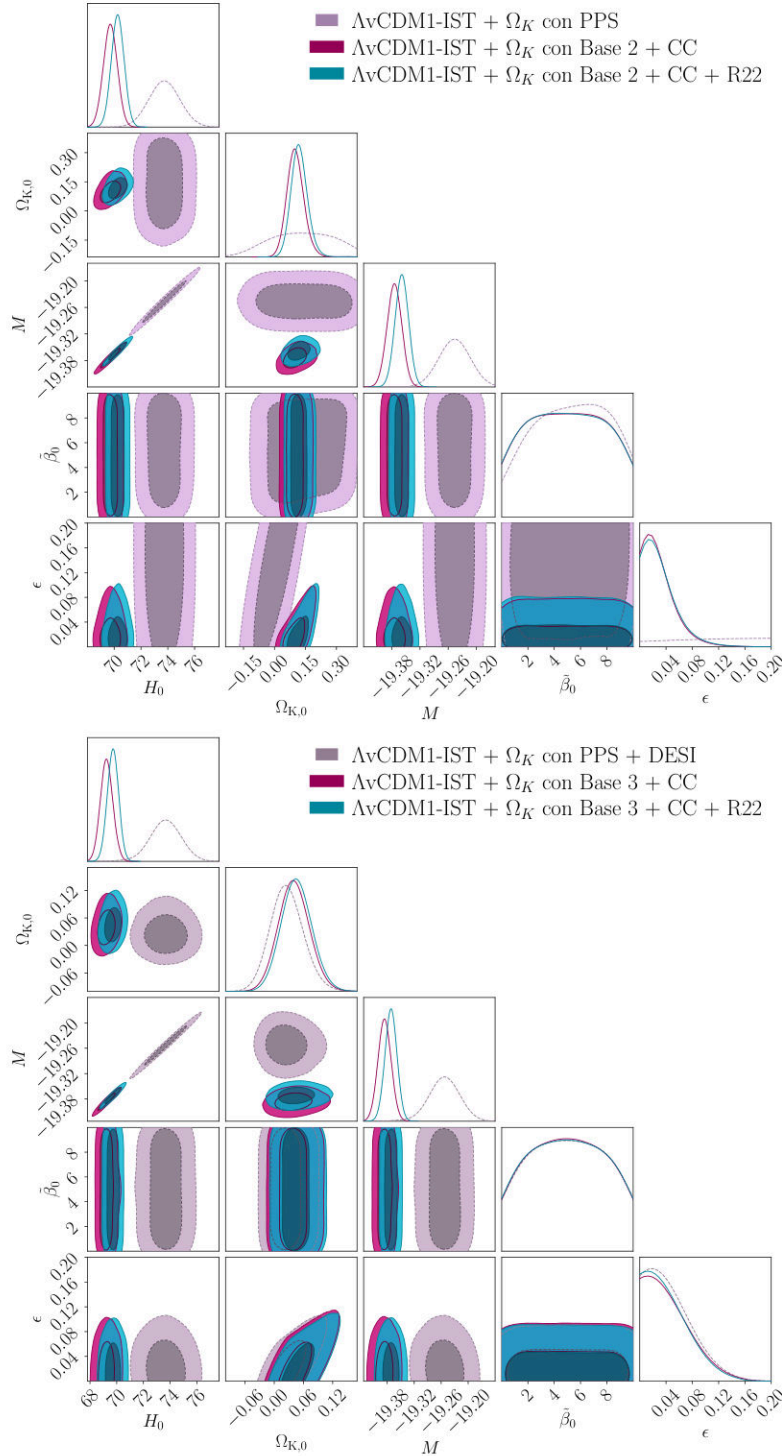


Figura 9.1.2: Distribuciones posteriores de los parámetros cosmológicos para el modelo Λ vCDM1-IST + Ω_K con viscosidad constante. *Panel superior:* conjuntos de datos PPS, Base 2, CC y R22. *Panel inferior:* conjuntos de datos PPS + DESI, Base 3, CC y R22. Los contornos muestran regiones de credibilidad en 2D al 68 % y 95 %, junto con las distribuciones posteriores marginalizadas en 1D de cada parámetro.

De igual modo, el coeficiente de compresibilidad adiabática ϵ muestra una dependencia del conjunto de datos considerados. Los datos de PPS permiten valores relativamente altos para este coeficiente ($\epsilon = 0.112^{+0.089}_{-0.080}$). La incorporación de DESI (y/o HBAO) reduce drásticamente este parámetro, obteniéndose $\epsilon = 0.008^{+0.047}_{-0.005}$ para PPS + DESI, lo que corresponde a una diferencia de 1.18σ respecto al valor obtenido sin DESI. En los modelos con curvatura, ϵ tiende a ser ligeramente superior que en sus contrapartes planas para los mismos conjuntos de datos

$$\epsilon = 0.23^{+0.42}_{-0.20} \quad (\text{PPS}), \quad (9.1.4a)$$

$$\epsilon = 0.018^{+0.051}_{-0.015} \quad (\text{PPS} + \text{DESI}). \quad (9.1.4b)$$

Se observa una marcada correlación positiva entre ϵ y $\Omega_{K,0}$, visible en los contornos bidimensionales de los modelos no planos mostrados en la Fig. 9.1.2. Esta tendencia se confirma cuantitativamente mediante el coeficiente de correlación de Pearson obtenido a partir de las cadenas MCMC, cuyos valores alcanzan $\text{corr} = 0.875$ para la combinación PPS + DESI y $\text{corr} = 0.926$ para las combinaciones que incluyen Base 3, indicando una fuerte correlación entre ambos parámetros.

En cuanto al parámetro de viscosidad $\tilde{\beta}_0$, los contornos de las Figs. 9.1.1 y 9.1.2 muestran que están débilmente constreñidos. En particular, en el plano $(\epsilon, \tilde{\beta}_0)$, la región de credibilidad se extiende a lo largo de un amplio rango de valores de $\tilde{\beta}_0$, indicando que los datos no logran acotarlo de manera precisa. Es importante señalar que este parámetro se encuentra fuertemente condicionado por la distribución previa uniforme adoptada en el análisis (véase Tabla 9.0.1).

9.1.2. Caso con m libre

En esta sección se analizan las restricciones cosmológicas obtenidas para los modelos denotados $\Lambda\nu\text{CDM2-IST}$ y $\Lambda\nu\text{CDM2-IST} + \Omega_K$, en los cuales el índice de viscosidad m se considera un parámetro libre. Los resultados se resumen en la Tabla 9.5.2, donde se reportan los valores MAP y los intervalos de credibilidad al 68 % para cada parámetro. Las Figs. 9.1.3 y 9.1.4 complementa este análisis, mostrando los regiones de credibilidad bidimensionales al 68 % y 95 % NC y las distribuciones posteriores marginalizadas unidimensionales para los parámetros libres.

Los resultados presentados en la Tabla 9.5.2 muestran que el parámetro m permanece débilmente constreñido por los datos tardíos. En particular, para la compilación PPS se obtiene $m = 0.71^{+0.90}_{-1.31}$, mientras que al incorporar DESI se obtiene $m = 0.3^{+1.1}_{-1.4}$. En ambos casos, el intervalo de credibilidad es amplio y compatible tanto con valores positivos como negativos. Este comportamiento es

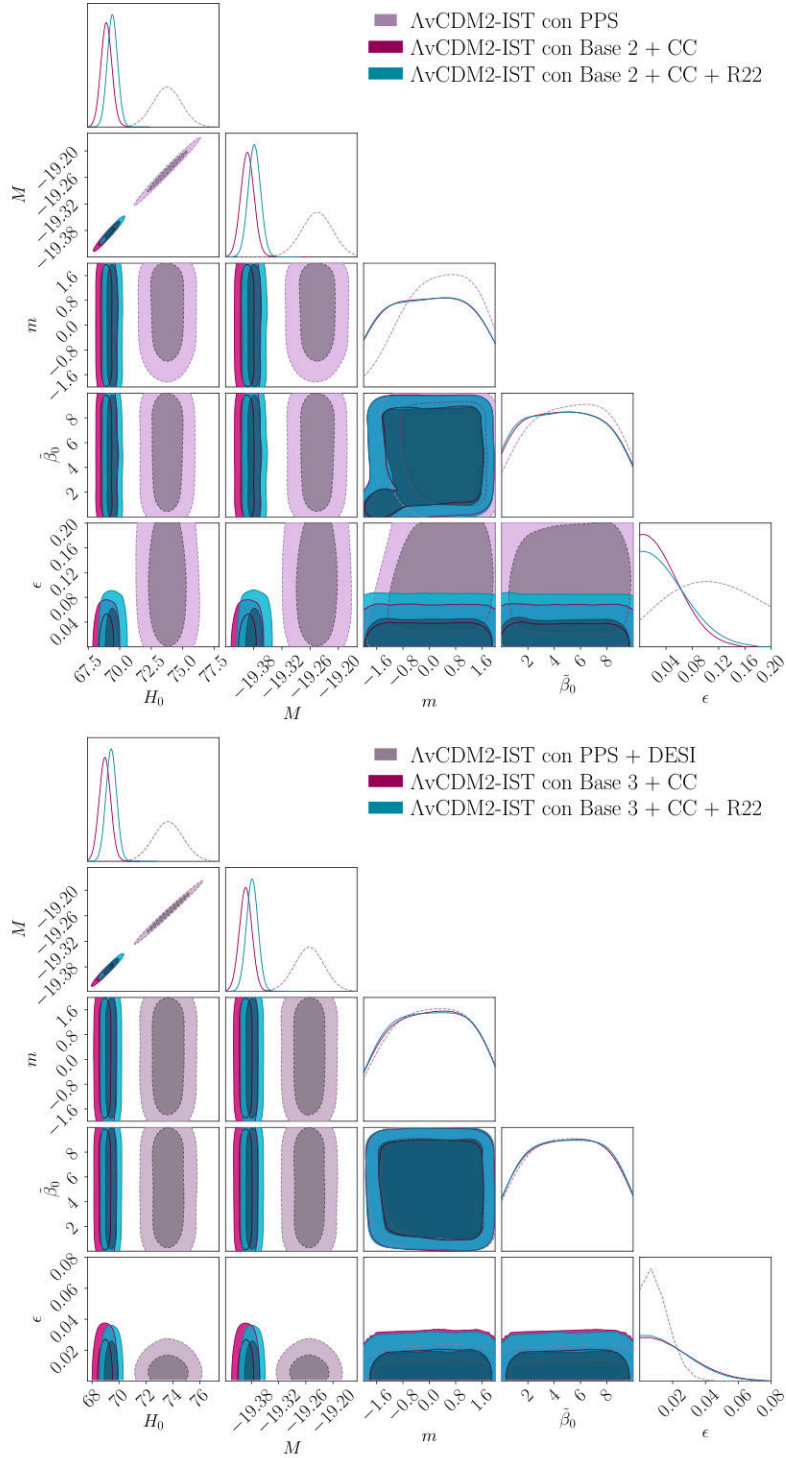


Figura 9.1.3: Distribuciones posteriores de los parámetros cosmológicos para el modelo Λ vCDM2-IST con m libre. *Panel superior:* conjuntos de datos PPS, Base 2, CC y R22. *Panel inferior:* conjuntos de datos PPS + DESI, Base 3, CC y R22. Los contornos muestran regiones de credibilidad en 2D al 68% y 95%, junto con las distribuciones posteriores marginalizadas en 1D de cada parámetro.

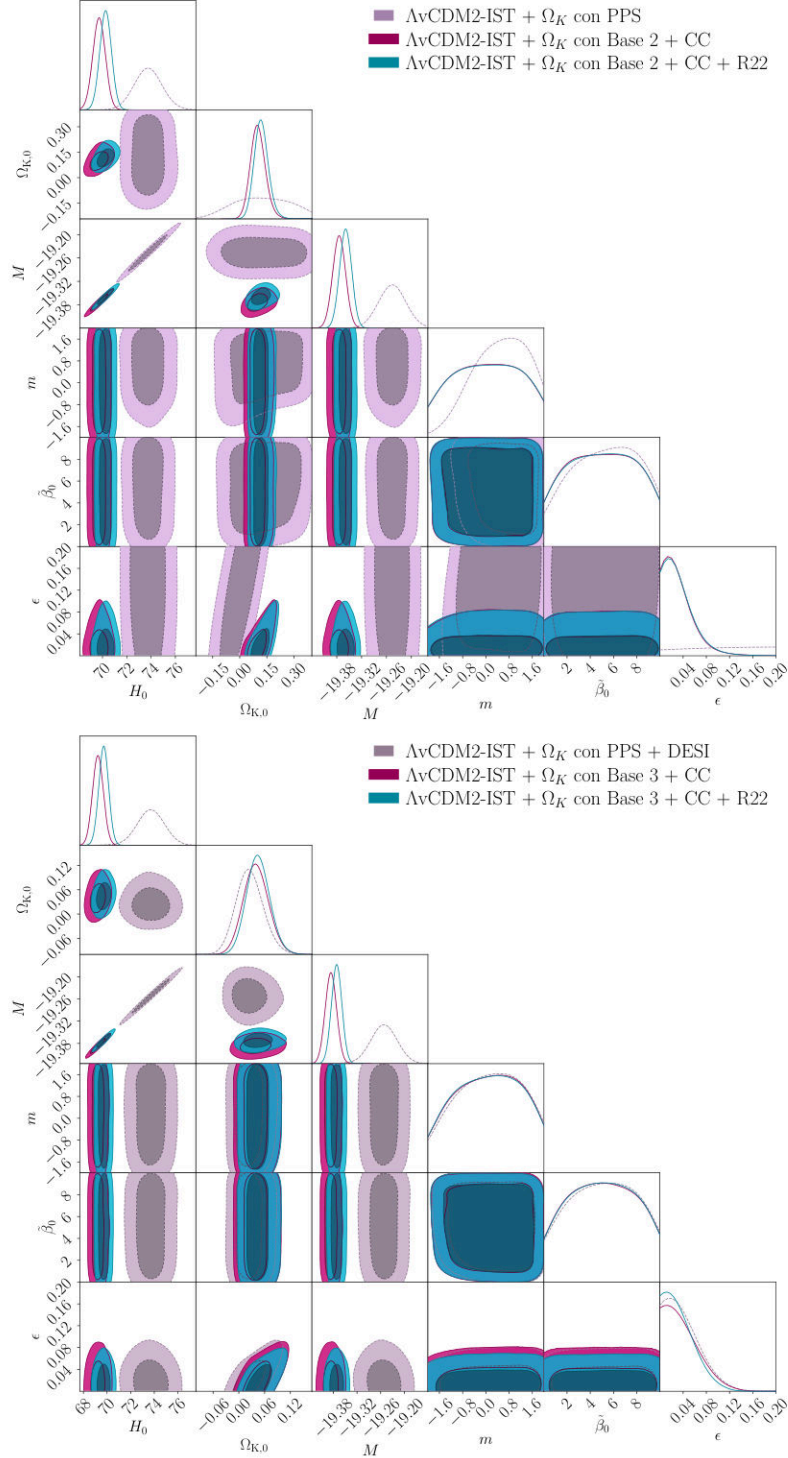


Figura 9.1.4: Distribuciones posteriores de los parámetros cosmológicos para el modelo Λ vCDM2-IST + Ω_K con m libre. *Panel superior:* conjuntos de datos PPS, Base 2, CC y R22. *Panel inferior:* conjuntos de datos PPS + DESI, Base 3, CC y R22. Los contornos muestran regiones de credibilidad en 2D al 68% y 95%, junto con las distribuciones posteriores marginalizadas en 1D de cada parámetro.

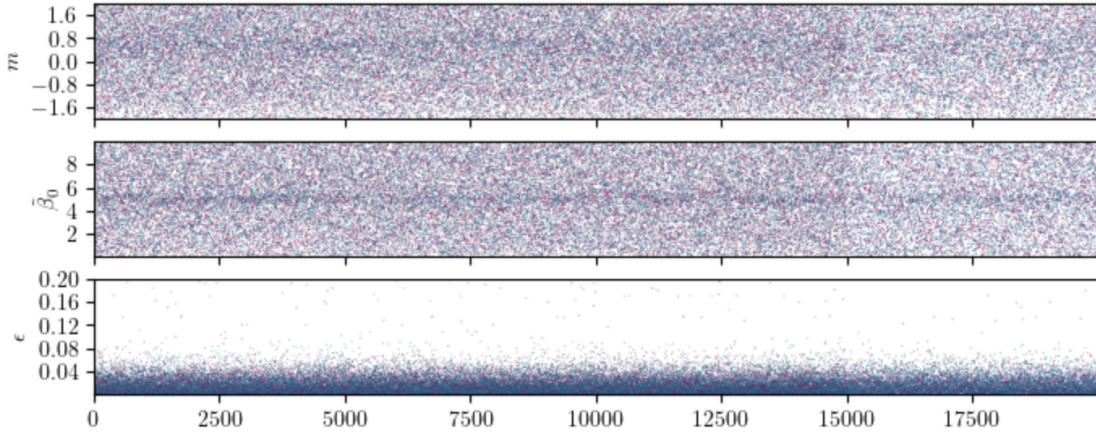


Figura 9.1.5: Cadenas MCMC para m , $\tilde{\beta}_0$ y ϵ en el modelo Λ vCDM2-TIS + Ω_K . La amplia exploración de m es coherente con los contornos bidimensionales de la Fig. 9.1.4, evidenciando que m y $\tilde{\beta}_0$ están débilmente constreñidos por los datos tardíos.

compatible con los contornos bidimensionales mostrados en las Figs. 9.1.3 y 9.1.4. Las distribuciones marginalizadas unidimensionales para m son planas y extendidas, lo que indica que los datos no favorecen ningún valor específico. De manera consistente, en los contornos bidimensionales, como $(m, \tilde{\beta}_0)$ o (m, ϵ) , las regiones de credibilidad se extienden a lo largo de todo el rango permitido de m . Este comportamiento es coherente con las cadenas MCMC presentadas en la Fig. 9.1.5, las cuales muestran una exploración casi homogénea del espacio de parámetros sin evidencia de regiones preferidas para m , reflejando que su posterior está dominada por la distribución previa más que por la información contenida en los datos. En consecuencia, modelos con distintos valores de m dentro del rango permitido por la distribución previa pueden ajustar los datos de expansión cósmica de manera prácticamente equivalente, compensando mediante variaciones en otros parámetros, como $\tilde{\beta}_0$. Esta tendencia se mantiene para todas las combinaciones de datos consideradas y en ambas geometrías espaciales, lo que sugiere que la falta de restricción sobre m es una propiedad intrínseca del modelo.

A pesar de la incertidumbre en m , los demás parámetros cosmológicos (H_0 , $\Omega_{b,0}h^2$, $\Omega_{vc,0}h^2$) muestran restricciones muy similares a las obtenidas en el caso $m = 0$. En particular, H_0 mantiene la tendencia observada entre los distintos conjuntos de datos. Considerando la curvatura espacial junto con R22 se obtiene

$$H_0 = 70.26^{+0.47}_{-0.48} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (\text{Base 2} + \text{CC} + \text{R22}), \quad (9.1.5a)$$

$$H_0 = 69.72^{+0.41}_{-0.42} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (\text{Base 3} + \text{CC} + \text{R22}). \quad (9.1.5b)$$

Por su parte, el coeficiente ϵ muestra una tendencia similar al caso $m = 0$, con valores cercanos a cero para la mayoría de las combinaciones de datos y ligeramente superiores para la compilación PPS, $\epsilon = 0.20^{+0.41}_{-0.18}$.

El parámetro de curvatura $\Omega_{K,0}$ muestra una clara dependencia del conjunto de datos empleado. Para las combinaciones que no incluyen DESI, se observan valores positivos de $\Omega_{K,0}$ que indican una preferencia por curvatura negativa. Esta tendencia es más pronunciada en Base 2 + CC + R22, donde $\Omega_{K,0} = 0.116^{+0.040}_{-0.038}$, lo que representa una tensión de $\sim 3\sigma$ respecto a la planitud espacial. En contraste, los conjuntos que incluyen DESI arrojan valores de $\Omega_{K,0}$ compatibles con un universo plano dentro de 1σ . En particular,

$$\Omega_{K,0} = 0.023^{+0.033}_{-0.032} \quad (\text{PPS} + \text{DESI}), \quad (9.1.6a)$$

$$\Omega_{K,0} = 0.023^{+0.044}_{-0.028} \quad (\text{Base 2} + \text{CC} + \text{R22}). \quad (9.1.6b)$$

9.1.3. Caso con $m = 1/2$

Finalmente, se analiza el caso con un índice de viscosidad fijo en $m = 1/2$, un valor que resulta de especial interés teórico, ya que esta elección permite obtener soluciones analíticas exactas dentro del formalismo de Israel-Stewart completo (Cruz et al., 2020). Los resultados se presentan en la Tabla 9.5.3 y en las Figs. 9.1.6 y 9.1.7.

Al fijar $m = 1/2$, las estimaciones del parámetro viscoso $\tilde{\beta}_0$ son plenamente consistentes con las obtenidas en los casos $m = 0$ y m libre. Asimismo, el coeficiente de viscosidad de volumen actual, calculado a partir de la Ec. 4.2.11, presenta un valor del orden de

$$\zeta_0 \sim 10^8 \text{ Pas}, \quad (9.1.7)$$

superando en dos órdenes de magnitud el valor inferido en el formalismo de Eckart, para el cual se obtuvo $\zeta_0 \sim 10^6 \text{ Pas}$. Este comportamiento refleja el efecto de los tiempos de relajación introducidos en las teorías de Israel-Stewart, que permiten admitir viscosidades más elevadas preservando la causalidad del fluido.

Al permitir la curvatura espacial, las restricciones sobre $\Omega_{K,0}$ siguen el patrón ya observado: compatible con la planitud para los conjuntos que incluyen DESI y una preferencia por curvatura negativa en caso contrario (véase Tabla 9.5.3). La correlación positiva entre ϵ y $\Omega_{K,0}$ persiste

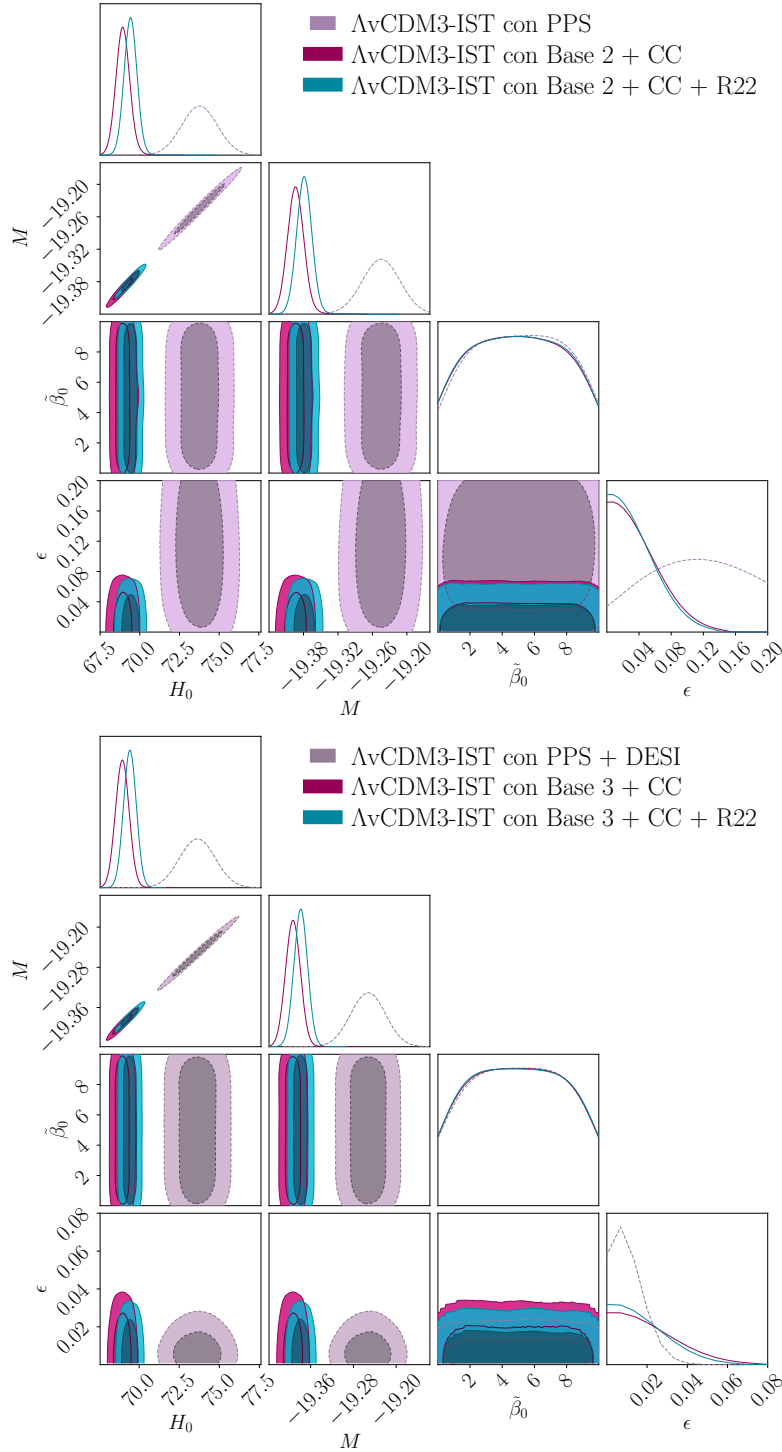


Figura 9.1.6: Distribuciones posteriores de los parámetros cosmológicos para el modelo Λ vCDM3-IST con $m = 1/2$. *Panel superior*: conjuntos de datos PPS, Base 2, CC y R22. *Panel inferior*: conjuntos de datos PPS + DESI, Base 3, CC y R22. Los contornos muestran regiones de credibilidad en 2D al 68% y 95%, junto con las distribuciones posteriores marginalizadas en 1D de cada parámetro.

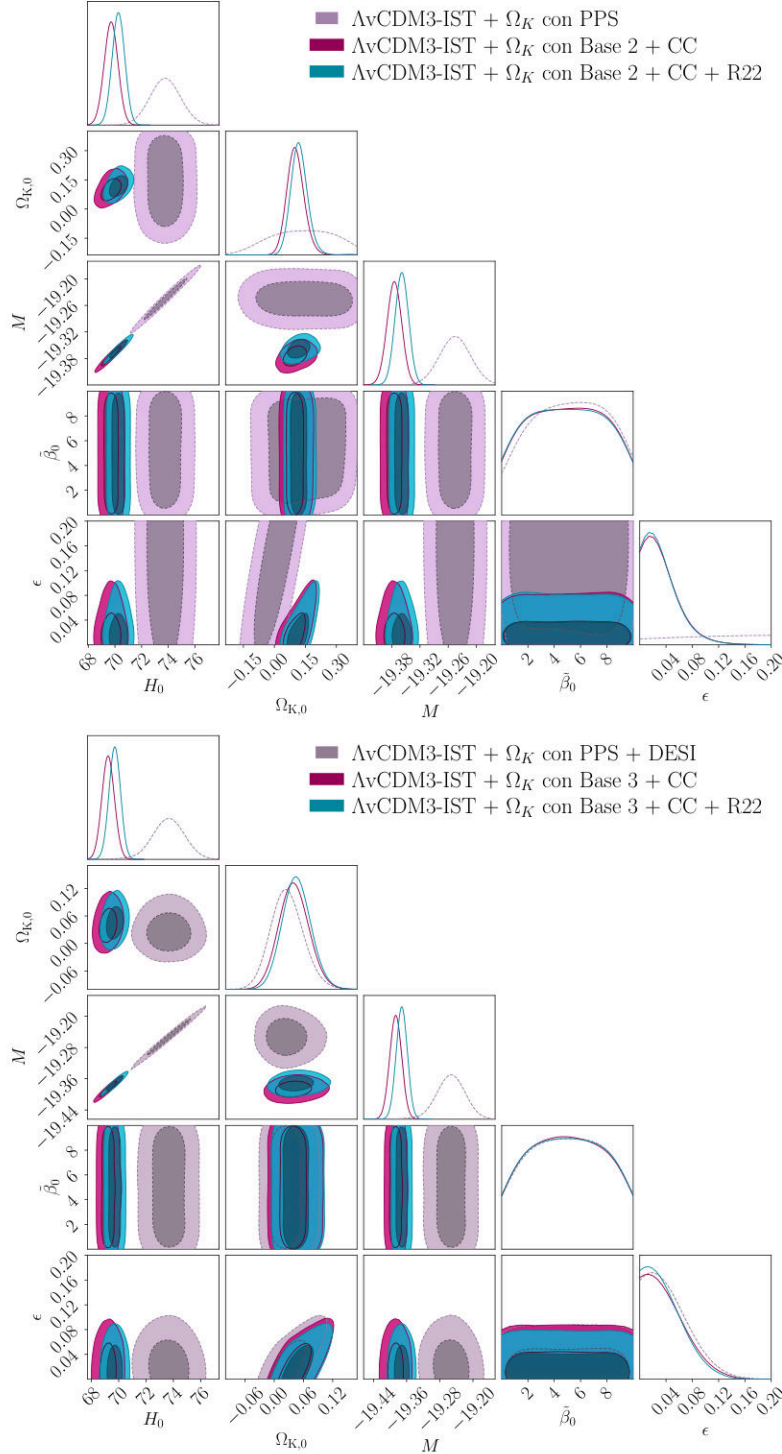


Figura 9.1.7: Distribuciones posteriores de los parámetros cosmológicos para el modelo Λ vCDM3-IST + Ω_K con $m = 1/2$. *Panel superior:* conjuntos de datos PPS, Base 2, CC y R22. *Panel inferior:* conjuntos de datos PPS + DESI, Base 3, CC y R22. Los contornos muestran regiones de credibilidad en 2D al 68% y 95%, junto con las distribuciones posteriores marginalizadas en 1D de cada parámetro.

también en este caso con $m = 1/2$, como se aprecia en los contornos bidimensionales de la Fig. 9.1.7.

Las estimaciones del resto de los parámetros cosmológicos son prácticamente idénticas a las obtenidas en los casos anteriores para las mismas combinaciones de datos. Dicha estabilidad indica que los parámetros fundamentales del modelo ΛCDM se mantienen robustos frente a la inclusión de la viscosidad, lo que sugiere que los efectos viscosos solo actúan como una pequeña corrección a la dinámica estándar.

9.2. Formalismo de Israel-Stewart completo

A diferencia del escenario truncado, en el formalismo ISC no se incluye el caso $m = 0$. Al intentar implementar esta configuración, la integración numérica produce valores indefinidos (NaN) durante la ejecución, lo que impide un muestreo MCMC estable y la convergencia de las cadenas. Además, cuando la integración logra completarse, las posteriores son bimodales, lo que sugiere inestabilidades numéricas o degeneraciones no físicas del modelo. Por estas razones, el estudio se restringe a los casos con m libre y $m = 1/2$, para los cuales la integración es estable y el muestreo presenta convergencia adecuada.

9.2.1. Caso con m libre

En esta sección se analizan las restricciones cosmológicas obtenidas para los modelos denotados $\Lambda\nu\text{CDM2-ISC}$ y $\Lambda\nu\text{CDM2-ISC} + \Omega_K$, en los cuales el índice de viscosidad m se considera un parámetro libre. Los resultados se resumen en la Tabla 9.5.4, donde se reportan los valores MAP junto con sus correspondientes intervalos de credibilidad al 68 % para cada parámetro. Las Figs. 9.2.1 y 9.2.2 complementan este estudio, mostrando regiones de credibilidad bidimensionales al 68 % y 95 % NC y las distribuciones posteriores marginalizadas unidimensionales para los parámetros libres.

Las estimaciones de H_0 muestran el mismo patrón observado en los demás escenarios analizados. Para el conjunto PPS se obtiene $H_0 = 73.5 \pm 1.1 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, consistentes con los reportados por (Brout et al., 2022), mientras que al incorporar DESI se tiene $H_0 = 73.4^{+1.3}_{-1.2} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. En contraste, al considerar combinaciones con HBAO y CC, el valor de H_0 disminuye, obteniéndose

$$H_0 = 69.87 \pm 0.49 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (\text{Base 2} + \text{CC}), \quad (9.2.1a)$$

$$H_0 = 69.32 \pm 0.50 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (\text{Base 3} + \text{CC}). \quad (9.2.1b)$$

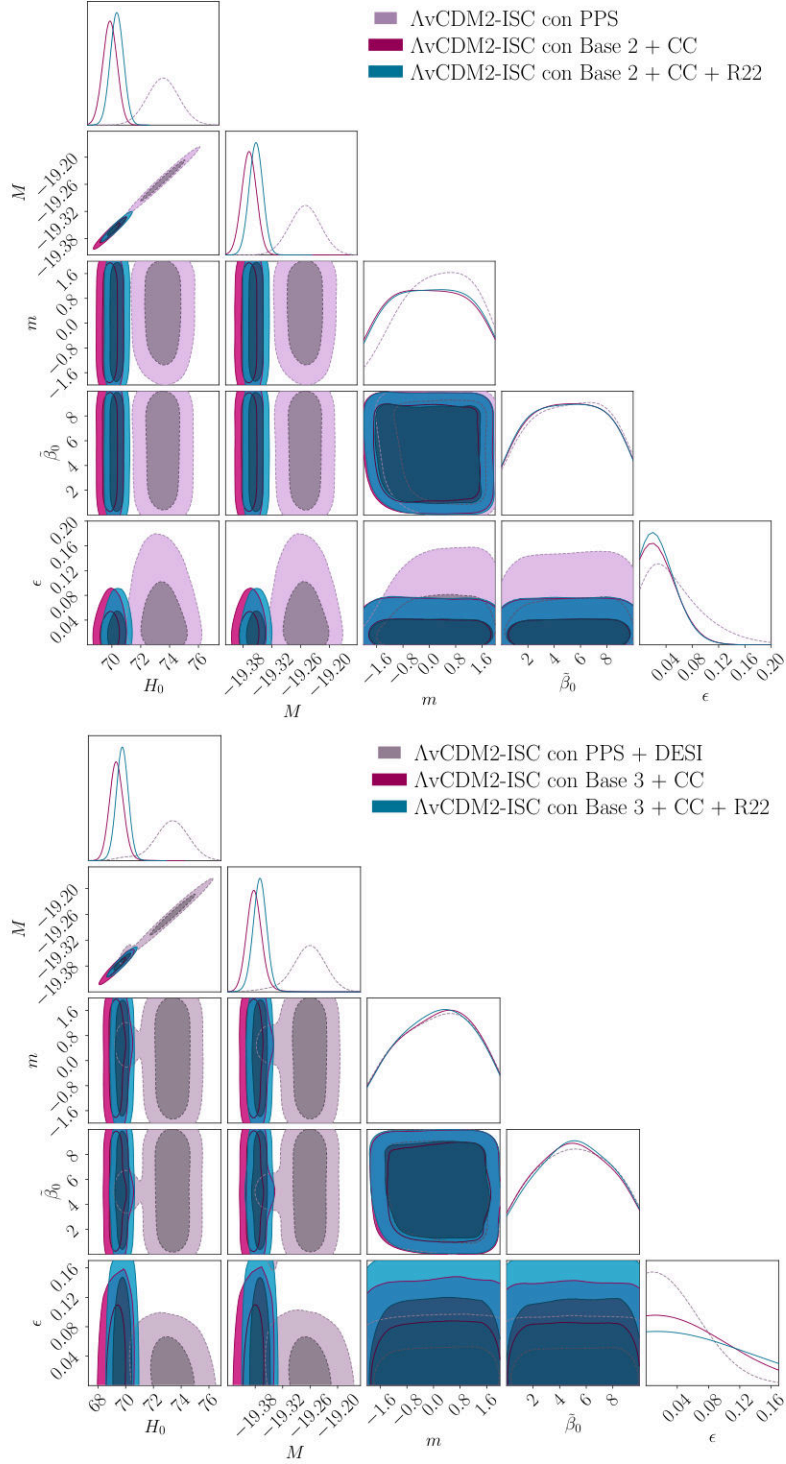


Figura 9.2.1: Distribuciones posteriores de los parámetros cosmológicos para el modelo Λ vCDM2-ISC con m libre. *Panel superior:* conjuntos de datos PPS, Base 2, CC y R22. *Panel inferior:* conjuntos de datos PPS + DESI, Base 3, CC y R22. Los contornos muestran regiones de credibilidad en 2D al 68 % y 95 %, junto con las distribuciones posteriores marginalizadas en 1D de cada parámetro.

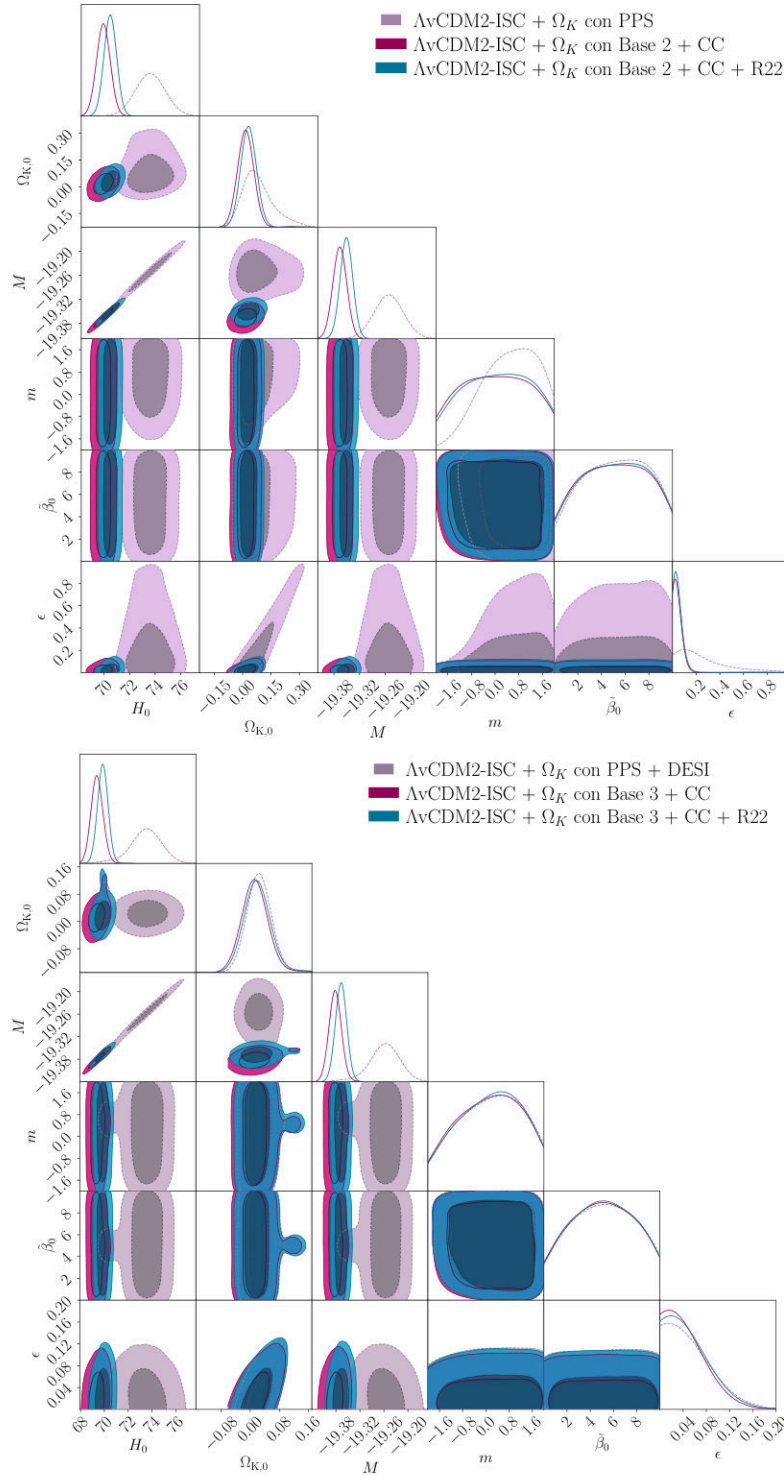


Figura 9.2.2: Distribuciones posteriores de los parámetros cosmológicos para el modelo Λ CDM2-ISC + Ω_K con m libre. *Panel superior:* conjuntos de datos PPS, Base 2, CC y R22. *Panel inferior:* conjuntos de datos PPS + DESI, Base 3, CC y R22. Los contornos muestran regiones de credibilidad en 2D al 68 % y 95 %, junto con las distribuciones posteriores marginalizadas en 1D de cada parámetro.

La inclusión de R22 desplaza ligeramente las estimaciones hacia valores mayores, aunque sin modificar sustancialmente la tendencia general. En consecuencia, la libertad introducida por el parámetro m no genera cambios apreciables en la estimación del parámetro de Hubble.

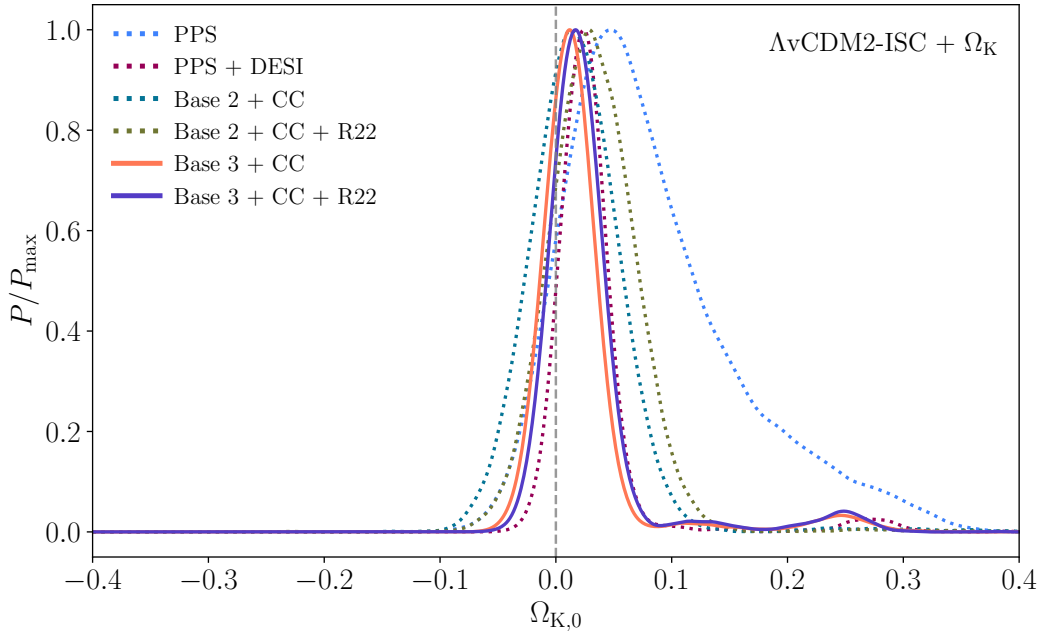
Al considerar la curvatura espacial, la compilación PPS arroja $\Omega_{K,0} = 0.053^{+0.087}_{-0.069}$, con una desviación de la planitud espacial de $\sim 0.7\sigma$. La inclusión de DESI reduce esta desviación a $\sim 0.6\sigma$,

$$\Omega_{K,0} = 0.022^{+0.037}_{-0.035} \quad (\text{PPS} + \text{DESI}). \quad (9.2.2)$$

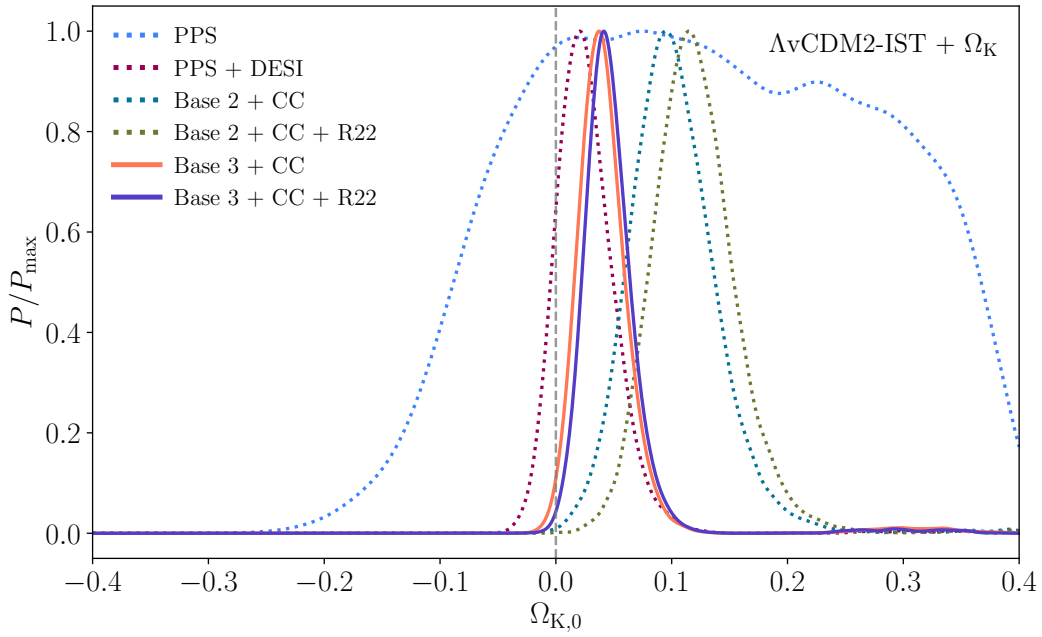
Las combinaciones que incorporan CC y R22 mantienen esta tendencia. En ningún caso se detecta una desviación estadísticamente significativa de la planitud, en acuerdo con el modelo estándar Λ CDM. Cabe destacar que, en el análisis presentado en el Capítulo 7 se obtuvo $\Omega_{K,0} = 0.147^{+0.077}_{-0.078}$ para el conjunto PPS en el escenario de viscosidad nula, es decir, para el modelo Λ CDM + Ω_K , lo que corresponde a una desviación de 1.9σ respecto a la planitud. En contraste, los resultados obtenidos aquí dentro del formalismo ISC presentan un valor central considerablemente menor. No obstante, ambos resultados permanecen en acuerdo dentro de $\sim 0.9\sigma$.

Para complementar este análisis, las Figs. 9.2.3 y 9.2.4 muestran una comparación directa de $\Omega_{K,0}$ obtenida bajo los formalismos de Israel-Stewart (ISC, Fig. 9.2.3a; IST, Fig. 9.2.3b) y Eckart (Fig. 9.2.4a), junto con el modelo de referencia Λ CDM + Ω_K ($\tilde{\zeta}_0 = 0$, Fig. 9.2.4b). En cada figura se presentan las distribuciones posteriores marginalizadas de $\Omega_{K,0}$, normalizadas a su valor máximo ($P/P_{\max}$), para los casos con y sin DESI. De este modo, es posible comparar la forma y la posición relativa de las posteriores, evaluando posibles desplazamientos respecto a $\Omega_{K,0} = 0$ y el impacto de la inclusión de DESI.

En el modelo Λ CDM + Ω_K (Fig. 9.2.4b), la inclusión de DESI conduce a distribuciones posteriores más estrechas para $\Omega_{K,0}$, reduciendo la incertidumbre sin evidenciar una desviación significativa de la planitud espacial. La incorporación adicional de CC y R22 refuerza esta tendencia, favoreciendo valores aún más cercanos a $\Omega_{K,0} = 0$. En el formalismo de Eckart (Fig. 9.2.4a), se observa un comportamiento similar, donde la inclusión de DESI reduce la dispersión de la posterior, mientras que la adición de CC y R22 contribuye a concentrar aún más la distribución en torno a la planitud. En el formalismo ISC (Fig. 9.2.3a), los valores que maximizan la distribución posterior se mantienen cercanos a cero, y la inclusión de DESI y R22 no modifica de manera apreciable la estimación. En cambio, en el formalismo IST (Fig. 9.2.3b) se aprecia una mayor sensibilidad a la inclusión de DESI y R22, reflejada en cambios más notorios en la forma de la posterior. En conjunto, estas diferencias indican que la inferencia de $\Omega_{K,0}$ depende del modelo cosmológico considerado y de los conjuntos de datos utilizados, observándose que el formalismo ISC conduce a estimaciones más próximas a $\Omega_{K,0} = 0$.

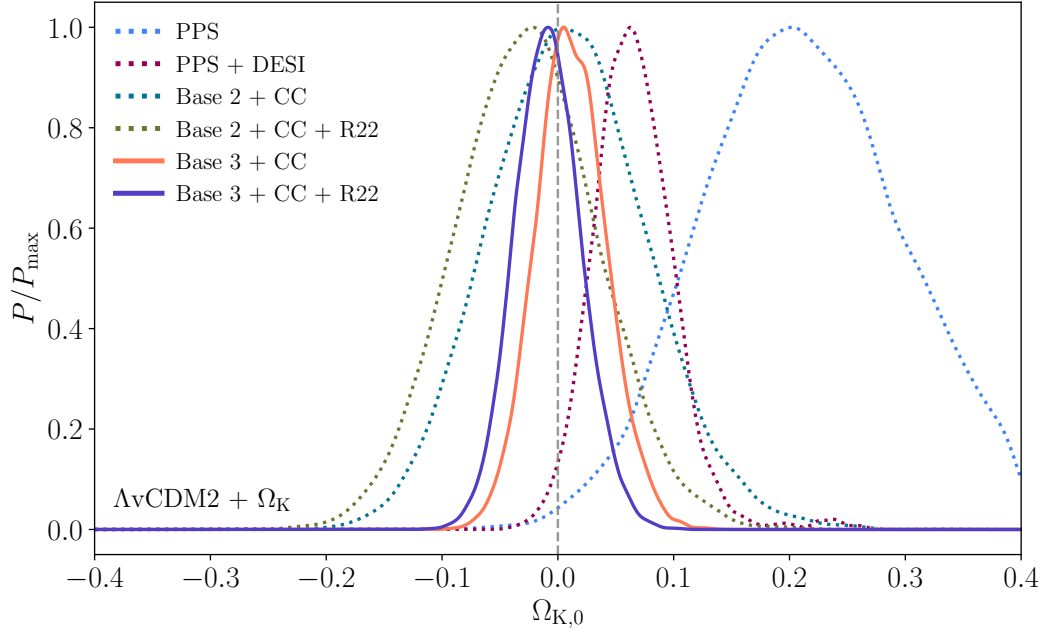


(a)

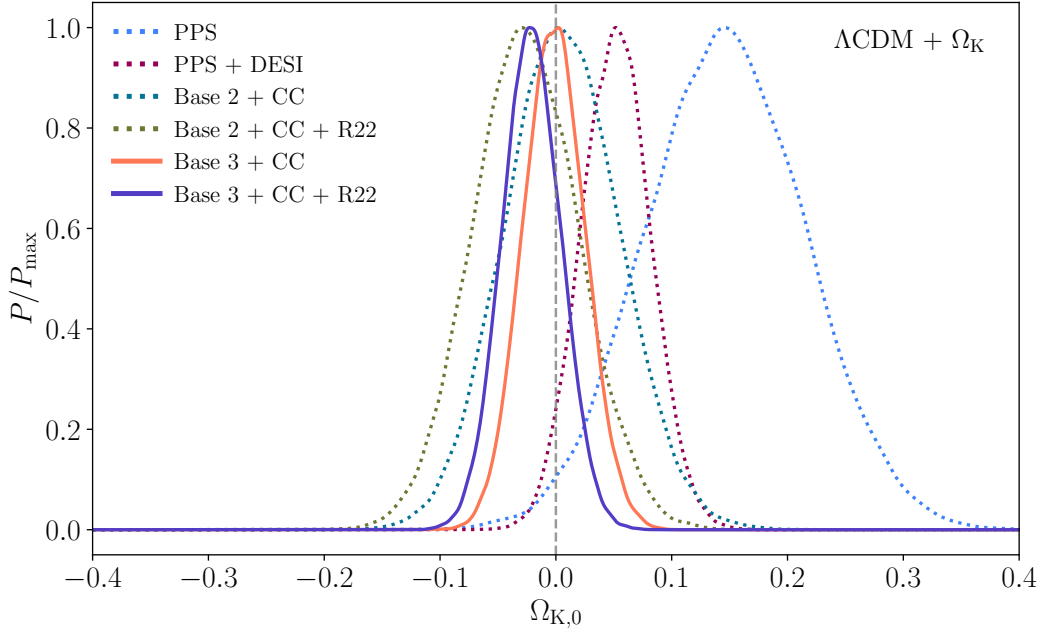


(b)

Figura 9.2.3: Distribuciones posteriores marginalizadas de $\Omega_{K,0}$, normalizadas a su valor máximo ($P/P_{\max}$), para los modelos Λ vCDM2 con curvatura espacial en los formalismos de Israel-Stewart en sus versiones ISC (*panel a*) e IST (*panel b*). Las líneas punteadas corresponden a las combinaciones de datos PPS, PPS + DESI, Base 2 + CC y Base 2 + CC + R22, mientras que las líneas continuas representan los resultados obtenidos con Base 3 + CC y Base 3 + CC + R22.



(a)



(b)

Figura 9.2.4: Distribuciones posteriores marginalizadas de $\Omega_{K,0}$, normalizadas a su valor máximo ($P/P_{\max}$), para los modelos $\Lambda\nu\text{CDM2} + \Omega_{K,0}$ en el formalismo de Eckart (panel a) y para el modelo de referencia $\Lambda\text{CDM} + \Omega_K$ ($\zeta_0 = 0$, panel b). Las líneas punteadas corresponden a las combinaciones de datos PPS, PPS+DESI, Base 2+CC y Base 2+CC+R22, mientras que las líneas continuas representan los resultados obtenidos con Base 3+CC y Base 3+CC+R22.

El comportamiento del parámetro m en ISC refuerza las tendencias observadas en el formalismo truncado. Los resultados resumidos en la Tabla 9.5.4 muestran que m permanece débilmente constreñido por los datos cosmológicos tardíos. Para todas las combinaciones de datos, incluso en presencia de curvatura espacial, los intervalos son extremadamente amplios, abarcando un rango que incluye valores positivos, negativos y cero. Por ejemplo, cuando se permite curvatura espacial, se tiene $m = 0.95^{+0.77}_{-1.22}$ para PPS, mientras que al incorporar DESI se tiene $m = 0.57^{+0.97}_{-1.47}$. Esta falta de poder restrictivo se manifiesta claramente en las Figs. 9.2.1 y 9.2.2: las distribuciones marginalizadas unidimensionales para m son notablemente planas y, en los planos bidimensionales como $(m, \tilde{\beta}_0)$, las regiones de credibilidad se extienden a lo largo de todo el dominio de m , indicando que los datos no logran restringir este parámetro de manera independiente. Este comportamiento es consistente en todas las combinaciones de datos analizadas y en ambas geometrías espaciales.

A pesar de que las incertidumbres son tan amplias que impiden una restricción significativa, es notable que los valores MAP se sitúan en un rango cercano a $m = 1/2$; por ejemplo,

$$m = 0.49^{+0.98}_{-1.48} \quad (\text{Base 3} + \text{CC}, \Lambda\text{vCDM2-ISC}), \quad (9.2.3a)$$

$$m = 0.49^{+0.99}_{-1.45} \quad (\text{Base 3} + \text{CC}, \Lambda\text{vCDM2-ISC} + \Omega_K). \quad (9.2.3b)$$

Este resultado es particularmente interesante desde el punto de vista teórico, ya que $m = 1/2$ (equivalente a $s = 1/2$, $\xi \propto \rho^s$) permite soluciones analíticas exactas en el formalismo ISC (Cruz et al., 2020). Las desviaciones respecto a este valor indican que todos los valores de m son compatibles con $m = 1/2$ dentro de $\sim 1\sigma$, y en la mayoría de los casos dentro de $\sim 0.2\sigma$. En particular, las combinaciones que incluyen DESI o Base 3 + CC presentan desviaciones inferiores a 0.06σ . Así, aunque los datos no logran acotar m de manera significativa, tampoco presentan evidencia en contra del escenario teóricamente privilegiado $m = 1/2$.

La libertad en m se encuentra correlacionada con el parámetro adimensional $\tilde{\beta}_0$, que controla el término viscoso actual en la ecuación dinámica. En general, $\tilde{\beta}_0$ muestra variaciones moderadas entre conjuntos de datos. En el escenario espacialmente plano,

$$\tilde{\beta}_0 = 6.6^{+2.1}_{-4.3} \quad (\text{PPS}), \quad (9.2.4a)$$

$$\tilde{\beta}_0 = 5.1^{+3.2}_{-3.0} \quad (\text{PPS} + \text{DESI}). \quad (9.2.4b)$$

La inclusión de curvatura no introduce cambios significativos en su valor MAP. No obstante, es

importante señalar que este parámetro se encuentra fuertemente condicionado por la distribución previa uniforme adoptada en el análisis (véase Tabla 9.0.1), lo que limita la capacidad de los datos para restringirlo de manera independiente. A partir de estos valores se obtiene la viscosidad actual ζ_0 , calculada con la Ec. (4.2.11), la cual resulta del orden

$$\zeta_0 \sim 10^8 \text{ Pa s}, \quad (9.2.5)$$

valor compatible con la presencia de tiempos de relajación en estas teorías, que permiten sostener viscosidades más altas sin violar el principio de causalidad.

9.2.2. Caso con $m = 1/2$

Se analiza ahora el escenario particular en el cual el índice de viscosidad se fija en $m = 1/2$, valor de especial interés teórico, ya que en el formalismo ISC conduce a una solución analítica exacta (Cruz et al., 2020). Esta elección reduce el espacio de parámetros y permite examinar si el caso teóricamente privilegiado es también compatible con las restricciones observacionales derivadas de los datos cosmológicos tardíos. Los resultados se resumen en la Tabla 9.5.5, donde se presentan los valores MAP junto con sus correspondientes intervalos de credibilidad al 68 % NC.

Las estimaciones de H_0 son prácticamente indistinguibles de las obtenidas en el caso con m libre. Para PPS se obtiene $H_0 = 73.5 \pm 1.1 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, mientras que la combinación PPS + DESI produce $H_0 = 73.4 \pm 1.3 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. En las combinaciones Base 2 + CC y Base 3 + CC se obtienen $H_0 = 69.87^{+0.49}_{-0.50}$ y $H_0 = 69.43^{+0.60}_{-0.54} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, respectivamente, manteniendo la misma tendencia observada en el caso general.

En el escenario con curvatura espacial, $\Omega_{K,0}$ continúa siendo compatible con la planitud dentro de 1σ para todas las combinaciones de datos consideradas. La inclusión de DESI reduce nuevamente la dispersión, reforzando la consistencia con un universo espacialmente plano.

El parámetro $\tilde{\beta}_0$ presenta valores MAP bien definidos para cada conjunto de datos. Por ejemplo, para

$$\tilde{\beta}_0 = 5.1 \pm 3.2 \quad (\text{PPS}), \quad (9.2.6a)$$

$$\tilde{\beta}_0 = 4.3^{+3.9}_{-2.7} \quad (\text{Base 2 + CC}). \quad (9.2.6b)$$

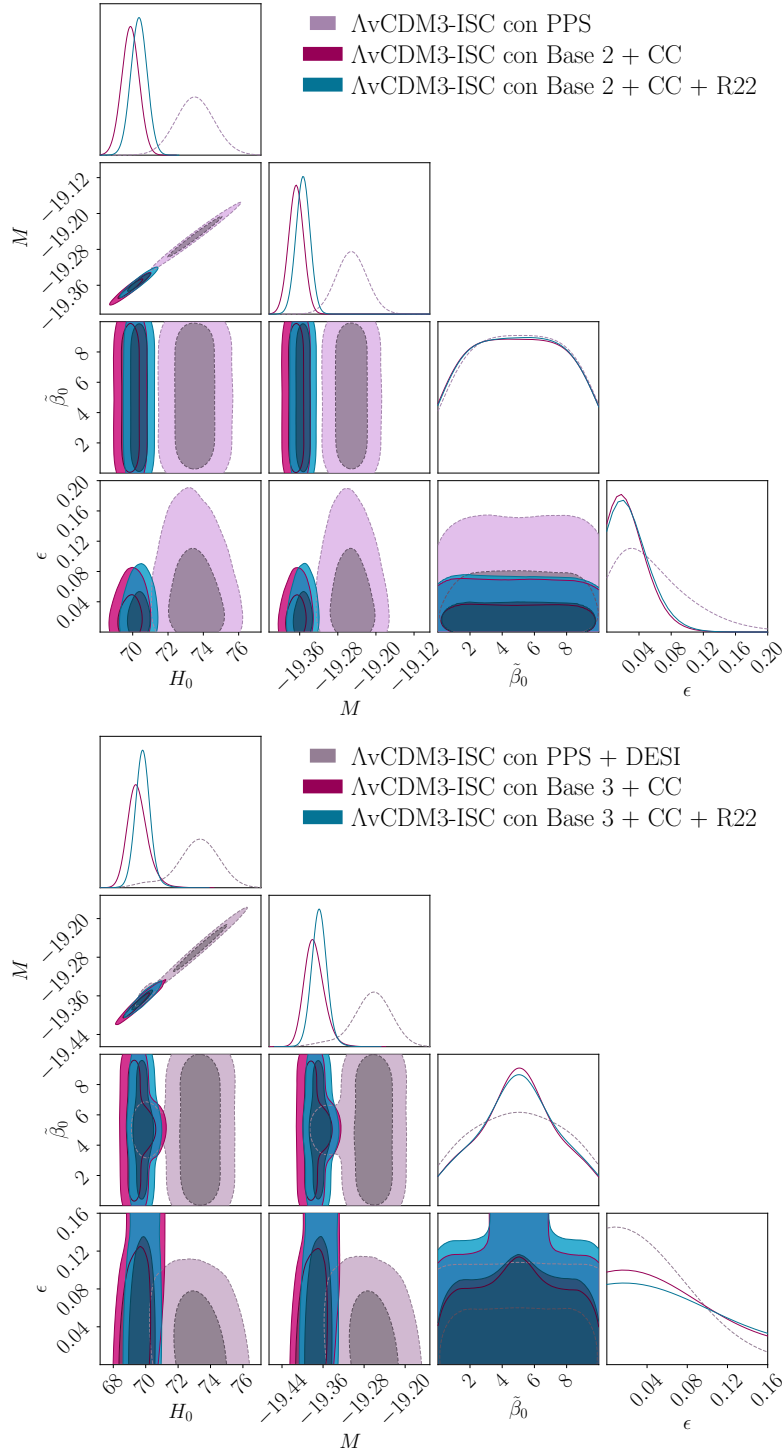


Figura 9.2.5: Distribuciones posteriores de los parámetros cosmológicos para el modelo Λ vCDM3-ISC con $m = 1/2$. *Panel superior:* conjuntos de datos PPS, Base 2, CC y R22. *Panel inferior:* conjuntos de datos PPS + DESI, Base 3, CC y R22. Los contornos muestran regiones de credibilidad en 2D al 68% y 95%, junto con las distribuciones posteriores marginalizadas en 1D de cada parámetro.

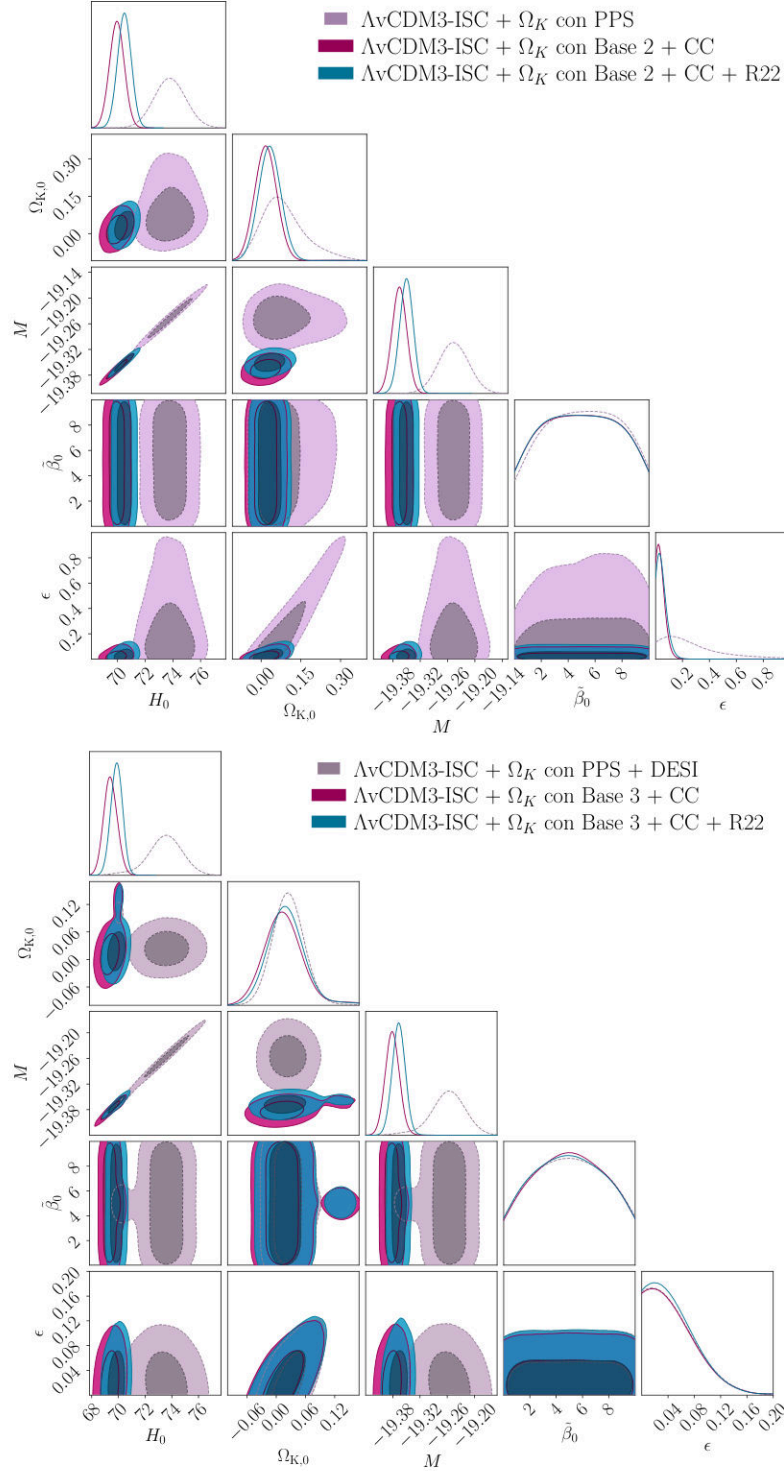


Figura 9.2.6: Distribuciones posteriores de los parámetros cosmológicos para el modelo Λ vCDM3-ISC + Ω_K con $m = 1/2$. *Panel superior:* conjuntos de datos PPS, Base 2, CC y R22. *Panel inferior:* conjuntos de datos PPS + DESI, Base 3, CC y R22. Los contornos muestran regiones de credibilidad en 2D al 68 % y 95 %, junto con las distribuciones posteriores marginalizadas en 1D de cada parámetro.

Todos los conjuntos de datos conducen a estimaciones de la viscosidad actual del orden de $\zeta_0 \sim 10^8$ Pa.s. Resultando compatible con la reconstrucción obtenida en el escenario general, indicando que al fijar m no se altera significativamente la escala efectiva del término disipativo.

Finalmente, el coeficiente de compresibilidad adiabática ϵ permanece pequeño y con un valor MAP cercano a cero, reproduciendo el mismo comportamiento observado en el caso con m libre. Esto indica que los términos dinámicos adicionales asociados al formalismo de Israel-Stewart tienen un impacto limitado en el régimen cosmológico tardío. En consecuencia, fijar $m = 1/2$ reduce el espacio de parámetros del modelo, pero no produce una mejora estadísticamente significativa ni modifica de forma apreciable la dinámica efectiva de la expansión.

9.3. Modelos de selección

Para evaluar el desempeño relativo de los modelos viscosos frente al modelo estándar Λ CDM, se realiza una comparación estadística mediante los criterios de información AIC, BIC y DIC, definidos en la Sección 5.5.2 a partir de las Ecs. (5.5.7), (5.5.9) y (5.5.10), respectivamente, junto con el factor de Bayes basado, introducido en la Sección 5.5.1. Los valores correspondientes al modelo Λ CDM para cada combinación de datos se presentan en las Tablas 7.6.3 y 8.5.8.

Los resultados obtenidos en el formalismo IST se presentan en las Tablas 9.5.6 y 9.5.7, mientras que los correspondientes al formalismo ISC se resumen en la Tabla 9.5.8. En dichas tablas se reportan los valores de Δ AIC, calculados respecto al modelo de referencia Λ CDM mediante la Ec. (7.4.1). Asimismo, se presentan los valores de la evidencia bayesiana y del correspondiente factor de Bayes, definido en la Ec. (5.5.6).

9.3.1. Criterio de Información

En el formalismo IST, los escenarios de geometría plana presentan Δ AIC < 0 para todas las combinaciones de datos consideradas, con la única excepción de Δ AIC = 0.13 para Base 2 + CC. Esto indica una preferencia consistente por el modelo estándar Λ CDM. En particular, para Λ vCDM2-IST con la combinación Base 3 + CC + R22 se obtiene Δ AIC = -7.19 , lo que corresponde a evidencia fuerte en contra del modelo viscoso. Una tendencia similar se observa para Λ vCDM3-IST y Λ vCDM1-IST con la misma combinación de datos, que presentan Δ AIC = -4.50 y Δ AIC = -4.21 , respectivamente, ambos valores compatibles con evidencia positiva a favor de Λ CDM. En los modelos que incorporan curvatura espacial, la preferencia por Λ CDM es aún más pronunciada. Todos los valores de Δ AIC son negativos, situándose en el rango $-9.34 \leq \Delta$ AIC ≤ -4.30 , lo que indica evidencia de positiva a fuerte en favor del modelo estándar.

Los valores más negativos se alcanzan para las combinaciones que incluyen R22: $\Delta\text{AIC} = -9.34$ para Λ vCDM2-IST + Ω_K con Base 2 + CC + R22 y $\Delta\text{AIC} = -9.26$ para el mismo modelo con Base 3 + CC + R22.

El BIC refuerza esta preferencia. En todos los escenarios viscosos se obtiene $\Delta\text{BIC} < -6$, lo que favorece fuertemente al modelo estándar Λ CDM (véanse las Tablas 9.5.6, 9.5.7 y 9.5.8). Los valores de BIC imponen una fuerte penalización a los modelos viscosos en todos los casos.

El DIC muestra un comportamiento menos uniforme, aunque en general mantiene la misma tendencia observada con AIC y BIC. En algunos casos la preferencia por Λ CDM es débil o no concluyente. Por ejemplo, para Λ vCDM1-IST con PPS + DESI se obtiene $\Delta\text{DIC} = 1.64$, mientras que para Λ vCDM3-IST con la misma combinación de datos se obtiene $\Delta\text{DIC} = 0.45$. En ambos casos $\Delta\text{DIC} < 2$, existiendo solo evidencia débil a favor del modelo viscoso IST. En cambio, cuando se incorpora R22, el DIC señala una preferencia más clara por el modelo estándar. Por ejemplo, se obtiene $\Delta\text{DIC} = -7.55$ para Λ vCDM1-IST con Base 3 + CC + R22 y $\Delta\text{DIC} = -9.53$ para Λ vCDM3-IST con Base 2 + CC + R22, lo que corresponde a evidencia fuerte en contra de los modelos viscosos. Una tendencia similar se observa al considerar las extensiones con curvatura espacial. Para las mismas combinaciones de datos se obtienen $\Delta\text{DIC} = -6.00$ para Λ vCDM1-IST + Ω_K y $\Delta\text{DIC} = -6.02$ para Λ vCDM3-IST + Ω_K , respectivamente. Aunque la magnitud de ΔDIC se reduce ligeramente respecto al caso plano, los valores continúan indicando una preferencia clara por Λ CDM. En consecuencia, el DIC tampoco respalda de manera consistente a los escenarios viscosos dentro del formalismo IST.

En el formalismo ISC, el comportamiento es en general similar al observado en el formalismo truncado. En el caso del AIC, la mayoría de los valores cumplen $\Delta\text{AIC} < -2$, lo que indica evidencia positiva a fuerte a favor del modelo estándar Λ CDM. Por ejemplo, Λ vCDM2-ISC con la combinación Base 3 + CC + R22 presenta $\Delta\text{AIC} = -4.70$, lo que corresponde a evidencia positiva a favor de Λ CDM. De forma similar, se obtiene $\Delta\text{AIC} = -2.15$ para Λ vCDM3-ISC con PPS + DESI, valor compatible con evidencia positiva a favor del modelo estándar. No obstante, aparece una excepción para la combinación Base 2 + CC. En este caso se obtiene $\Delta\text{AIC} = 1.00$ para Λ vCDM3-ISC, lo que corresponde a evidencia débil a favor del modelo viscoso. Al considerar la extensión con curvatura espacial, el valor aumenta a $\Delta\text{AIC} = 2.09$, lo que indica evidencia positiva en favor del escenario viscoso.

El BIC vuelve a favorecer fuertemente al modelo estándar. Por ejemplo, para Λ vCDM2-ISC con Base 3 + CC + R22 se obtiene $\Delta\text{BIC} = -15.62$, mientras que para Λ vCDM3-ISC con PPS + DESI se tiene $\Delta\text{BIC} = -7.57$. Estos valores corresponden a evidencia muy fuerte y positiva, respectivamente, a favor de Λ CDM. Por tanto, incluso cuando el AIC sugiere una penalización menos

severa, el BIC continúa mostrando que la complejidad adicional de los modelos viscosos en ISC no resulta estadísticamente favorecida.

El DIC es el criterio que exhibe el comportamiento más singular dentro del formalismo ISC. En algunos casos favorece al modelo viscoso, como ocurre para Λ vCDM2-ISC con Base 2 + CC, donde $\Delta\text{DIC} = 2.44$, valor que corresponde a evidencia positiva a favor del modelo viscoso. También Λ vCDM2-ISC con Base 2 + CC + R22 presenta $\Delta\text{DIC} = 0.82$, aunque en este caso la evidencia es débil. Sin embargo, para combinaciones que incluyen DESI se obtienen valores positivos muy altos, como $\Delta\text{DIC} = 25.37$ en Λ vCDM2-ISC con PPS + DESI. Con la convención adoptada, estos valores indican evidencia muy fuerte a favor del modelo viscoso. Esta tendencia contrasta de forma notable con la señal proporcionada por AIC y BIC, y sugiere que, en el formalismo completo, la complejidad efectiva inferida por el DIC puede diferir de manera importante de la penalización codificada en los otros criterios. Además, en algunos casos de Base 3 + CC y Base 3 + CC + R22 el DIC no se reporta, lo que sugiere dificultades numéricas en su estimación.

Para los modelos ISC con curvatura espacial, el AIC y el BIC continúan favoreciendo predominantemente a Λ CDM. Por ejemplo, Λ vCDM2-ISC + Ω_K con Base 3 + CC + R22 presenta $\Delta\text{AIC} = -6.19$ y $\Delta\text{BIC} = -22.56$, lo que corresponde a evidencia fuerte y muy fuerte, respectivamente, a favor del modelo estándar. De forma similar, Λ vCDM3-ISC + Ω_K con Base 3 + CC + R22 arroja $\Delta\text{AIC} = -3.83$ y $\Delta\text{BIC} = -14.74$, compatibles con evidencia fuerte y muy fuerte, respectivamente, en favor de Λ CDM. Solo en casos puntuales, como Λ vCDM3-ISC + Ω_K con Base 2 + CC, donde $\Delta\text{AIC} = 2.09$, el AIC muestra evidencia positiva a favor del modelo viscoso.

El DIC para los modelos ISC con curvatura espacial vuelve a mostrar una respuesta muy distinta. En varios casos favorece al modelo viscoso con evidencia muy fuerte, como en Λ vCDM3-ISC + Ω_K con Base 3 + CC, donde $\Delta\text{DIC} = 21.10$, y en Λ vCDM2-ISC + Ω_K con Base 3 + CC, con $\Delta\text{DIC} = 11.70$. También para Λ vCDM2-ISC + Ω_K con Base 2 + CC se obtiene $\Delta\text{DIC} = 2.19$, lo que corresponde a evidencia positiva a favor del modelo viscoso. En contraste, otros casos favorecen débilmente a Λ CDM, como Λ vCDM2-ISC + Ω_K con Base 2 + CC + R22, donde $\Delta\text{DIC} = -1.33$. En conjunto, este comportamiento indica que, dentro del formalismo completo y especialmente al incorporar curvatura espacial, el DIC responde de forma mucho más sensible a la estructura de la distribución posterior que AIC y BIC.

9.3.2. Factor de Bayes

Como complemento a los criterios de información, se considera la evidencia bayesiana, que permite comparar modelos incorporando explícitamente la información previa y penalizando de

forma natural a aquellos parámetros que no están bien constreñidos por los datos.

Para estimar la evidencia bayesiana de los modelos viscosos en relación con Λ CDM, se utiliza el código `MCEvidence` (Heavens et al., 2017a,b). Mediante las cadenas MCMC obtenidas en la inferencia de parámetros, se calculan los factores de Bayes para las distintas combinaciones de modelos y conjuntos de datos. La interpretación de los resultados se realiza mediante la escala de Jeffreys (Jeffreys, 1961; Kass & Raftery, 1995), adoptando la convención propuesta por Heavens et al. (2017b) y resumida en la Tabla 5.5.1.

Para los modelos espacialmente planos en el formalismo de IST, los valores de $\ln \mathcal{B}_{0i}$ son en general pequeños y cercanos a cero, lo que indica que la evidencia bayesiana no favorece de manera contundente a ninguno de los modelos. Por ejemplo, para Λ vCDM1-IST se tiene $\ln \mathcal{B}_{0i} = -1.60$ para PPS y $\ln \mathcal{B}_{0i} = -1.17$ para Base 2 + CC + R22. En estos casos, la evidencia es positiva a favor del modelo viscoso. Un comportamiento similar se observa en Λ vCDM2-IST, donde el valor más negativo es $\ln \mathcal{B}_{0i} = -2.71$ para PPS, seguido por $\ln \mathcal{B}_{0i} = -2.16$ para Base 2 + CC + R22.

La situación cambia cuando se incorpora curvatura espacial. Se cumple $\ln \mathcal{B}_{0i} > 0$ para todas las combinaciones, salvo para PPS con Λ vCDM2-IST + Ω_K . En particular, destacan $\ln \mathcal{B}_{0i} = 5.60$ para PPS + DESI (Λ vCDM1-IST + Ω_K) y $\ln \mathcal{B}_{0i} = 6.07$ para Base 3 + CC + R22 (Λ vCDM3-IST + Ω_K). Estos resultados implican una preferencia clara por el modelo Λ CDM frente a las extensiones viscosas con curvatura espacial.

Los modelos formulados en la teoría ISC muestran un comportamiento menos uniforme. En los modelos planos, Λ vCDM2-ISC presenta $\ln \mathcal{B}_{0i} = 3.96$ con PPS, lo que favorece fuertemente a Λ CDM. No obstante, con PPS + DESI se obtiene $\ln \mathcal{B}_{0i} = -1.51$, y con Base 3 + CC + R22 se alcanza $\ln \mathcal{B}_{0i} = -3.67$, indicando que, dependiendo del conjunto de datos, la evidencia puede pasar de una preferencia por Λ CDM a una preferencia positiva a fuerte por el modelo viscoso. Al incorporar curvatura espacial, el comportamiento es similar.

En consecuencia, la evidencia bayesiana sugiere que la viscosidad puede constituir una extensión estadísticamente viable de Λ CDM en los escenarios más simples, especialmente en el sector plano de IST, pero pierde soporte al aumentar la complejidad del modelo mediante la incorporación de curvatura espacial o al adoptar la formulación ISC.

9.4. Evolución de parámetros cosmológicos

Las Figs. 9.4.1 y 9.4.2, respectivamente, presentan la evolución del parámetro de Hubble $H(z)$ y del módulo de distancia en función del corrimiento al rojo para los distintos escenarios

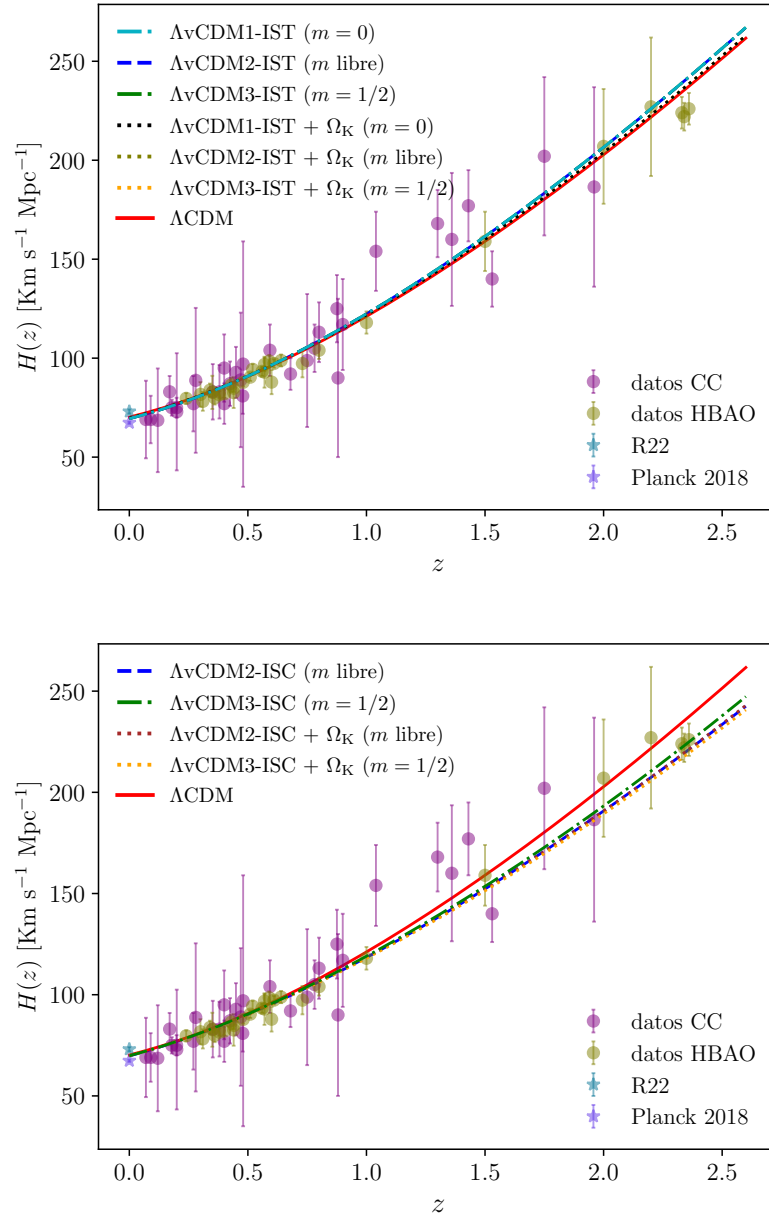


Figura 9.4.1: Evolución del parámetro de Hubble en función del corrimiento al rojo z . Se muestran datos observacionales independientes de $H(z)$, todos con sus respectivas barras de error: CC (puntos púrpura, $0.07 < z < 1.965$), HBAO (puntos verde oliva, $0.24 < z < 2.36$), la determinación local de H_0 desde SH0ES (R22; estrella turquesa) y el valor inferido del CMB (Planck 2018; estrella morada). Los datos se comparan con las predicciones teóricas: línea continua roja corresponde al modelo Λ CDM; líneas discontinuas, punto-guion y punteadas representan los distintos escenarios de los modelos con viscosidad en el formalismo de Israel-Stewart. *Panel superior*: Λ νCDM-IST y Λ νCDM-IST + Ω_K . *Panel inferior*: Λ νCDM-ISC y Λ νCDM-ISC + Ω_K . Los parámetros han sido restringidos utilizando la combinación de datos Base 3 + CC + R22.

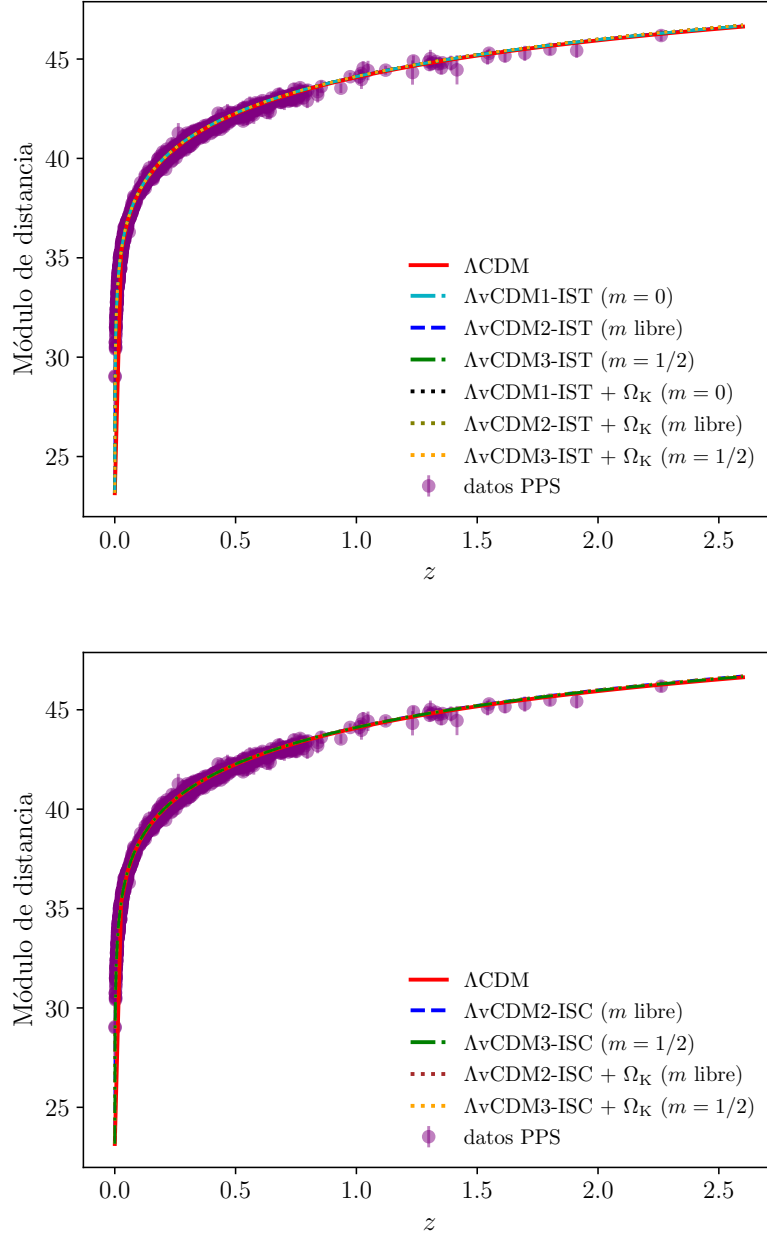


Figura 9.4.2: Módulo de distancia observado de la compilación PPS (puntos púrpura con barras de error) en el intervalo $0.001 < z < 2.26$. Los datos se comparan con las predicciones teóricas: línea continuas roja corresponde al modelos Λ CDM; líneas discontinuas, punto-guion y punteadas representan los distintos escenarios de los modelos con viscosidad en el formalismo de Israel-Stewart. *Panel superior:* Λ vCDM-IST y Λ vCDM-IST + Ω_K . *Panel inferior:* Λ vCDM-ISC y Λ vCDM-ISC + Ω_K . Los parámetros han sido restringidos utilizando la combinación de datos Base 3 + CC + R22.

de los modelos Λ vCDM-IST y Λ vCDM-ISC, junto con sus extensiones con curvatura espacial, considerando los casos $m = 0$, m libre y $m = 1/2$. Como referencia, también se incluye el modelo Λ CDM.

En la Fig. 9.4.1 se muestra la evolución de $H(z)$, donde se comparan las predicciones teóricas (véase las Ecs. (4.2.15) y (4.2.20)) con los datos observacionales del parámetro de Hubble (datos de CC, HBAO, R22 y Planck 2018). En el caso del formalismo IST, presentado en el panel superior, los modelos describen adecuadamente la tendencia de los datos en todo el intervalo de corrimiento al rojo considerado ($z < 2.4$). Las diferencias entre las distintas parametrizaciones son pequeñas y permanecen dentro de las incertidumbres observacionales en la mayor parte del rango explorado. En el panel inferior, correspondiente al formalismo ISC, los modelos Λ vCDM reproducen razonablemente los datos observacionales a bajos corrimientos al rojo ($z < 1$). Sin embargo, a corrimientos al rojo superiores, las predicciones comienzan a separarse entre sí y también de algunos puntos observacionales. En particular, el modelo Λ vCDM2-ISC predice una evolución de $H(z)$ más pronunciada que Λ CDM, mientras que otros escenarios presentan una expansión más lenta a altos corrimientos al rojo, especialmente el modelo Λ vCDM3-ISC + Ω_K .

La Fig. 9.4.2 muestra la comparación entre el módulo de distancia teórico y los datos de SNe Ia de la compilación PPS. En este caso, los distintos modelos reproducen adecuadamente las observaciones, ya que las curvas prácticamente se superponen entre sí, indicando que las diferencias entre modelos son pequeñas para la combinación de datos considerada.

Por su parte, el índice de viscosidad m , introducido en la Ec. (4.1.10), controla la dependencia funcional del coeficiente de viscosidad de volumen ζ con el parámetro de densidad de la VCDM. Este parámetro es fundamental para determinar el régimen cosmológico en el que los efectos disipativos son predominantes. Un valor de $m > 0$ implica que la viscosidad aumenta con la densidad, haciendo que los efectos disipativos sean más relevantes en épocas tempranas y disminuyendo con la expansión. Por el contrario, $m < 0$ indica que la viscosidad escala inversamente con la densidad, volviéndose significativa en épocas tardías. El caso $m = 0$ corresponde al escenario más simple de viscosidad constante. Este comportamiento se presenta en la Figura 9.4.3, donde se muestra la evolución del coeficiente de viscosidad ζ en función del corrimiento al rojo z para el modelo Λ vCDM. En el panel izquierdo (teoría ISC), se observa que ζ es mayor en épocas tempranas y disminuye hacia el presente, consistente con un valor de m positivo. En el panel derecho (teoría de Eckart), la evolución es la opuesta, mostrando un aumento de ζ en épocas recientes, lo que refleja la preferencia por $m < 0$ en este formalismo.

Sin embargo, la interpretación del signo de m depende del formalismo termodinámico empleado. En la teoría de Eckart, el coeficiente viscoso escala directamente como $\zeta \propto (\Omega_{\text{vc}}/\Omega_{\text{vc},0})^m$. En cam-

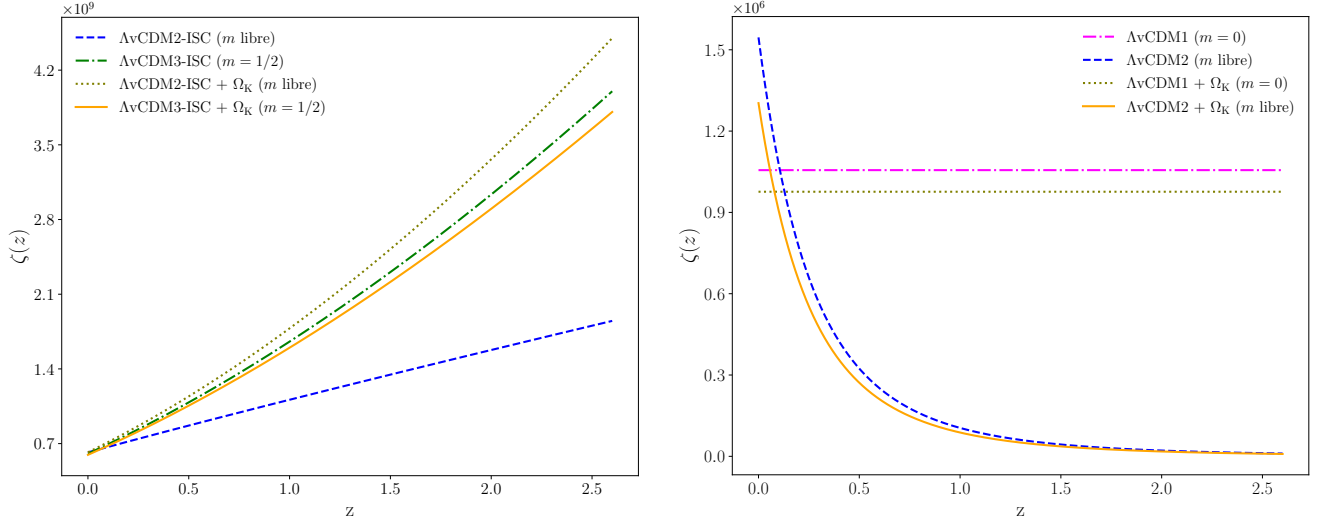


Figura 9.4.3: La evolución del coeficiente de viscosidad de volumen ζ con respecto al desplazamiento al rojo z para combinación de datos Base 3 + CC + R22. *Panel izquierdo*: modelos Λ vCDM en el formalismo de ISC. *Panel derecho*: modelos Λ vCDM en la teoría de Eckart.

bio, en la teoría de Israel-Stewart la dinámica del fluido viscoso incluye un tiempo de relajación y términos adicionales en la ecuación de evolución de la presión viscosa, lo que modifica la forma en que el término viscoso contribuye a la ecuación de propagación. No obstante, ambas representaciones pueden conducir a una misma dependencia funcional efectiva del término viscoso. En consecuencia, las predicciones teóricas permanecen en buen acuerdo con los datos observacionales, como se observa en las Figs. 9.4.1 y 9.4.2 (véase las Fig. 7.5.1, 8.3.1 y 8.3.2).

9.5. Conclusiones

En este capítulo se desarrolló un análisis observacional de diez modelos cosmológicos con viscosidad de volumen y constante cosmológica dentro del formalismo de Israel-Stewart, en su versión truncada y completa. En estos modelos, el coeficiente de viscosidad de volumen evoluciona de acuerdo con una ley de potencia de la forma

$$\zeta = \zeta_0 \left(\frac{\Omega_{\text{vc}}}{\Omega_{\text{vc},0}} \right)^m.$$

Se exploraron los casos de viscosidad constante ($m = 0$) y el escenario de viscosidad variable (m libre y $m = 1/2$), considerando geometrías espaciales planas y con curvatura. Por medio de un enfoque bayesiano basado en muestreo de MCMC, se realizó la inferencia de los parámetros cosmológicos de estos modelos utilizando mediciones del parámetro de Hubble $H(z)$ a partir de

los CC, una compilación independiente de datos de las BAO (HBAO), incluyendo las mediciones de DESI, datos de SNe Ia (PPS) y R22. De este análisis se extraen las siguientes conclusiones relevantes.

En relación con el parámetro de Hubble actual H_0 , los resultados dependen débilmente del modelo viscoso, pero fuertemente del conjunto de datos considerado. En particular, cuando se utilizan exclusivamente la compilación PPS se obtienen valores altos y consistentes en todos los escenarios: $H_0 = 73.7 \pm 1.1 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ para los modelos IST, y $H_0 = 73.5 \pm 1.1 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ para los modelos ISC, en concordancia con las estimaciones locales de la tensión de Hubble. La inclusión del conjunto DESI no modifica sustancialmente estas estimaciones. Además, R22 desplaza ligeramente estas estimaciones hacia valores menores, alcanzándose, por ejemplo, $H_0 = 70.26 \pm 0.47 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ para el modelo Λ vCDM2-IST + Ω_K con Base 2 + CC + R22. Es relevante destacar que permitir la libertad en el índice de viscosidad m no introduce cambios apreciables en la estimación de H_0 , lo que sugiere que este parámetro está determinado principalmente por el conjunto de datos empleado y no por la extensión viscosa del modelo.

En cuanto al parámetro de curvatura $\Omega_{K,0}$, se observa un comportamiento distinto entre los formalismos IST e ISC. En el caso de IST, la estimación de la curvatura presenta una marcada dependencia del conjunto de datos considerado. Los análisis que excluyen los datos de DESI muestran una preferencia por curvatura espacial negativa (es decir, $\Omega_{K,0} > 0$), que en algunos casos alcanza una tensión de hasta $\sim 3\sigma$. En particular, para el modelo Λ vCDM1-IST + Ω_K con la combinación Base 2 + CC + R22 se obtiene $\Omega_{K,0} = 0.117^{+0.040}_{-0.039}$, lo que corresponde a una discrepancia de 2.96σ respecto a la planitud espacial. Sin embargo, al incorporar las mediciones de DESI, la estimación de $\Omega_{K,0}$ presenta menores incertidumbres y se vuelve compatible con un universo espacialmente plano dentro de 1σ . Este resultado sugiere que las mediciones de DESI desempeñan un papel importante en la restricción sobre la curvatura espacial dentro del formalismo IST. En contraste, en el formalismo de ISC la estimación de la curvatura muestra una débil dependencia respecto a la inclusión de los datos de DESI. Los valores inferidos de $\Omega_{K,0}$ permanecen compatibles con la planitud espacial dentro de 1σ para las distintas combinaciones de datos consideradas, sin mostrar variaciones significativas al incorporar las mediciones de BAO de DESI. Por lo tanto, la estimación de $\Omega_{K,0}$ muestra dependencia tanto del modelo cosmológico como de los conjuntos de datos, evidenciando un comportamiento diferenciado entre los formalismos de Eckart e Israel–Stewart, siendo el ISC el que conduce sistemáticamente a valores más cercanos a $\Omega_{K,0} = 0$.

Respecto al coeficiente de compresibilidad ϵ , los resultados muestran que su valor también depende del conjunto de datos considerados. En los análisis que utilizan únicamente los datos de PPS, se obtienen valores relativamente altos, del orden de $\epsilon \sim 0.11$. Sin embargo, al incorporar

las mediciones de DESI, el parámetro se reduce drásticamente a valores cercanos a cero. Este comportamiento tiene una interpretación física directa a partir de la expresión del tiempo de relajación del fluido viscoso. De acuerdo con la Ec. (4.2.10), valores pequeños de ϵ implican tiempos de relajación mayores para el fluido viscoso, lo que indica que los efectos disipativos evolucionan más lentamente en escalas cosmológicas. En consecuencia, la reducción sistemática de ϵ al incorporar las mediciones de DESI sugiere que los procesos disipativos asociados a la viscosidad de volumen tienen un impacto limitado en la dinámica de expansión tardía del universo. Adicionalmente, se identifica una fuerte correlación positiva entre ϵ y el parámetro de curvatura $\Omega_{K,0}$. En particular, $\text{corr} = 0.926$ en el modelo Λ vCDM1-IST + Ω_K para la combinación Base 3 + CC + R22. Esta correlación indica que la estimación de los efectos disipativos está estrechamente ligada a la geometría espacial del universo, sugiriendo que la curvatura y la viscosidad efectiva contribuyen conjuntamente a la dinámica de la expansión cósmica dentro del formalismo de Israel-Stewart.

El índice de viscosidad m , cuando se trata como un parámetro libre, permanece débilmente restringido por los datos cosmológicos tardíos en ambos formalismos. Los intervalos de credibilidad al 68 % son extremadamente amplios, abarcando un rango que incluye valores positivos, negativos y nulos. Las distribuciones marginalizadas unidimensionales para m son notablemente planas, y en los planos bidimensionales como $(m, \tilde{\beta}_0)$ las regiones de credibilidad se extienden a lo largo de todo el dominio del parámetro. Este comportamiento indica que los datos observacionales empleados no logran restringir la dependencia funcional del coeficiente de viscosidad con la densidad de energía de la VCDM. No obstante, es destacable que los valores medios se sitúan consistentemente cerca de $m = 1/2$, con desviaciones típicas inferiores a 0.2σ en la mayoría de las combinaciones de datos que incluyen DESI. Dado que $m = 1/2$ permite soluciones analíticas exactas en el formalismo ISC, este resultado sugiere que, aunque los datos no favorecen un valor específico de m , tampoco presentan evidencia en contra del escenario teóricamente privilegiado.

Por otro lado, los análisis realizados arrojan valores de $m > 0$, lo que implica, en una primera interpretación, que la viscosidad aumenta con la densidad. Este comportamiento sugiere que los efectos disipativos fueron más relevantes en épocas tempranas y tienden a disminuir con la expansión del universo en los formalismos estudiados. Sin embargo, la interpretación física del signo de m depende crucialmente del formalismo termodinámico adoptado. En la teoría de Eckart, el coeficiente de viscosidad efectivo escala directamente como $\zeta \propto (\Omega_{\text{vc}}/\Omega_{\text{vc},0})^m$, mientras que en la teoría de Israel-Stewart, la dependencia efectiva que emerge en las ecuaciones dinámicas puede invertir esta relación de escalamiento. En particular, un valor $m < 0$ en el formalismo de Eckart produce una ley de escalamiento efectiva equivalente a la que se obtiene con un valor $m > 0$ en los modelos causales. Por consiguiente, aunque los ajustes observacionales favorecen valores de $m < 0$ en Eckart y $m > 0$ en los modelos de Israel-Stewart, estos resultados no deben interpretarse como

contradictorios. Por el contrario, describen de manera consistente un mismo comportamiento de la viscosidad efectiva a lo largo de la expansión cósmica, manifestado a través de dos formalismos termodinámicos distintos.

El parámetro adimensional $\tilde{\beta}_0$ permanece débilmente constreñido en todas las combinaciones de datos y modelos analizados. No obstante, es importante señalar que este parámetro se encuentra fuertemente condicionado por la distribución previa uniforme adoptada en el análisis. A partir de las estimaciones de $\tilde{\beta}_0$, y utilizando la Ec. (4.2.11), se obtiene una viscosidad de volumen actual del orden de $\zeta_0 \sim 10^8$ Pas, el cual es consistente con la presencia de tiempos de relajación en estas teorías, que permiten sostener viscosidades más altas sin violar el principio de causalidad.

El análisis de selección de modelos mediante criterios de información revela un panorama diferenciado según el formalismo considerado. En el formalismo de IST, los criterios AIC y BIC favorecen sistemáticamente al modelo estándar Λ CDM frente a todas las variantes viscosas analizadas. Los valores de Δ AIC son consistentemente negativos, situándose en el rango de evidencia positiva a fuerte en contra de los modelos viscosos, particularmente cuando se incorpora curvatura espacial. El criterio BIC refuerza esta preferencia con valores de Δ BIC < -6 en todos los casos, lo que constituye evidencia fuerte a muy fuerte a favor de Λ CDM. El DIC, por su parte, muestra un comportamiento menos uniforme, aunque en general mantiene la misma tendencia: cuando se incluye R22, los valores de Δ DIC alcanzan hasta -9.53 , indicando también una preferencia clara por el modelo estándar.

La evidencia bayesiana, evaluada mediante el factor de Bayes $\ln \mathcal{B}_{0i}$, matiza aún más estas conclusiones. En los modelos espacialmente planos del formalismo IST, los valores de $\ln \mathcal{B}_{0i}$ son pequeños y cercanos a cero, indicando que la evidencia no favorece de manera contundente a ninguno de los modelos. Por ejemplo, para Λ vCDM1-IST con PPS se obtiene $\ln \mathcal{B}_{0i} = -1.60$, lo que constituye evidencia positiva a favor del modelo viscoso. Sin embargo, al incorporar curvatura espacial, los valores de $\ln \mathcal{B}_{0i}$ se vuelven sistemáticamente positivos y, en algunos casos $\ln \mathcal{B}_{0i} > 5$, lo que implica una preferencia clara por Λ CDM. En el formalismo ISC, el comportamiento es menos uniforme: mientras que algunos conjuntos de datos favorecen fuertemente a Λ CDM (p. ej., $\ln \mathcal{B}_{0i} = 3.96$ para Λ vCDM2-ISC con PPS), otros muestran preferencia por los modelos viscosos (p. ej., $\ln \mathcal{B}_{0i} = -3.67$ para Λ vCDM2-ISC con Base 3 + CC + R22). Esta falta de consistencia transversal sugiere que la viabilidad estadística de los modelos ISC depende sensiblemente de la combinación de datos empleada y del grado de complejidad del modelo.

La evolución del parámetro de Hubble $H(z)$ y del módulo de distancia reconstruida a partir de los mejores ajustes muestra que todos los modelos viscosos analizados describen adecuadamente las observaciones en el rango de corrimiento al rojo considerado ($z < 2.4$). En el formalismo IST,

las diferencias entre las distintas parametrizaciones son pequeñas y permanecen dentro de las incertidumbres observacionales en la mayor parte del rango explorado. En el formalismo ISC, las predicciones comienzan a separarse entre sí a corrimientos al rojo superiores a $z \sim 1$, aunque el módulo de distancia se ajusta igualmente bien a los datos de supernovas en todos los casos. Esto indica que los modelos viscosos constituyen extensiones viables de la dinámica estándar, aunque su necesidad estadística no esté respaldada por los criterios de información más conservadores.

Tablas del Capítulo

Los resultados obtenidos para los parámetros cosmológicos de los modelos en el formalismo IST en sus versiones planas y con curvatura espacial, se presentan en las Tablas 9.5.1, 9.5.2, 9.5.3. Por su parte, los resultados correspondientes al formalismo ISC se resumen en las Tablas 9.5.4 y 9.5.5.

Las Tablas 9.5.6, 9.5.7 y 9.5.8 presentan la comparación estadística entre los modelos viscosos y el modelo Λ CDM, considerando $\chi^2_{\min}$, los criterios de información, la evidencia bayesiana y el factor de Bayes. En el formalismo IST se incluyen los escenarios con $m = 0$, m libre y $m = 1/2$; para ISC se considera m libre y $m = 1/2$.

Tabla 9.5.1: Resumen de las distribuciones posteriores marginalizadas de los parámetros cosmológicos para los escenarios Λ vCDM1-IST y Λ vCDM1-IST + Ω_K , correspondientes al caso $m = 0$, para distintos conjuntos de datos. Se presenta el MAP y el intervalo de credibilidad al 68 % para cada parámetro. El parámetro de viscosidad ζ_0 se calcula utilizando la Ec. (4.2.11).

Datos	H_0 ($\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$)	$\Omega_{K,0}$	$\Omega_{b,0}h^2$	$\Omega_{c,0}h^2$	M	ϵ	$\tilde{\beta}_0$	ζ_0 ($\times 10^8$) (Pas)
Λ vCDM1-IST								
PPS	73.7 ± 1.1	–	0.022 ± 0.011	0.120 ± 0.011	$-19.246^{+0.033}_{-0.032}$	$0.112^{+0.089}_{-0.080}$	$5.8^{+2.7}_{-3.8}$	$7.4^{+3.5}_{-4.9}$
PPS + DESI	73.6 ± 1.1	–	0.032 ± 0.006	$0.122^{+0.016}_{-0.015}$	$-19.253^{+0.034}_{-0.032}$	$0.008^{+0.047}_{-0.005}$	$4.5^{+3.7}_{-2.7}$	$5.7^{+4.7}_{-3.4}$
Base 2 + CC	68.93 ± 0.44	–	0.023 ± 0.014	$0.119^{+0.014}_{-0.013}$	-19.394 ± 0.014	$0.003^{+0.057}_{-0.000}$	$5.0^{+3.2}_{-3.3}$	$6.0^{+3.8}_{-3.9}$
Base 2 + CC + R22	$69.40^{+0.40}_{-0.39}$	–	$0.022^{+0.015}_{-0.014}$	$0.120^{+0.014}_{-0.013}$	-19.379 ± 0.013	$0.003^{+0.055}_{-0.000}$	$5.2^{+3.0}_{-3.5}$	$6.3^{+3.6}_{-4.2}$
Base 3 + CC	68.96 ± 0.42	–	0.023 ± 0.005	$0.120^{+0.012}_{-0.013}$	$-19.393^{+0.013}_{-0.014}$	$0.003^{+0.019}_{-0.000}$	$4.8^{+3.5}_{-3.0}$	$5.7^{+4.2}_{-3.6}$
Base 3 + CC + R22	$69.44^{+0.39}_{-0.40}$	–	$0.023^{+0.004}_{-0.003}$	$0.120^{+0.011}_{-0.012}$	-19.378 ± 0.013	$0.003^{+0.017}_{-0.000}$	$6.1^{+2.3}_{-4.3}$	$7.3^{+2.8}_{-5.2}$
Λ vCDM1-IST + Ω_K								
PPS	73.7 ± 1.1	$0.13^{+0.18}_{-0.15}$	0.023 ± 0.011	0.120 ± 0.011	$-19.246^{+0.033}_{-0.034}$	$0.23^{+0.42}_{-0.20}$	$6.7^{+2.1}_{-4.2}$	$8.6^{+2.7}_{-5.4}$
PPS + DESI	$73.6^{+1.2}_{-1.1}$	$0.023^{+0.036}_{-0.033}$	0.032 ± 0.004	$0.121^{+0.013}_{-0.011}$	-19.253 ± 0.034	$0.018^{+0.051}_{-0.015}$	$4.8^{+3.4}_{-3.0}$	$6.1^{+4.3}_{-3.8}$
Base 2 + CC	$69.71^{+0.51}_{-0.52}$	$0.098^{+0.041}_{-0.040}$	0.023 ± 0.011	0.120 ± 0.011	$-19.375^{+0.016}_{-0.015}$	$0.016^{+0.027}_{-0.013}$	$5.6^{+2.6}_{-3.9}$	$6.78^{+3.15}_{-4.72}$
Base 2 + CC + R22	$70.26^{+0.48}_{-0.47}$	$0.117^{+0.040}_{-0.039}$	0.023 ± 0.011	0.120 ± 0.011	-19.359 ± 0.014	$0.017^{+0.029}_{-0.014}$	$4.2^{+4.0}_{-2.6}$	$5.1^{+4.9}_{-3.2}$
Base 3 + CC	69.23 ± 0.46	$0.038^{+0.035}_{-0.032}$	0.022 ± 0.003	$0.120^{+0.012}_{-0.014}$	$-19.386^{+0.015}_{-0.014}$	$0.012^{+0.055}_{-0.009}$	4.9 ± 3.2	5.9 ± 3.8
Base 3 + CC + R22	69.72 ± 0.42	$0.044^{+0.033}_{-0.031}$	$0.023^{+0.005}_{-0.004}$	$0.119^{+0.014}_{-0.012}$	-19.372 ± 0.013	$0.011^{+0.054}_{-0.008}$	$4.9^{+3.3}_{-3.2}$	$5.9^{+4.0}_{-3.9}$

Tabla 9.5.2: Resumen de las distribuciones posteriores marginalizadas de los parámetros cosmológicos para los escenarios $\Lambda\nu$ CDM2-IST y $\Lambda\nu$ CDM2-IST + Ω_K , correspondientes al caso m libre, para distintos conjuntos de datos. Se presenta el MAP y el intervalo de credibilidad al 68 % para cada parámetro. El parámetro de viscosidad ζ_0 se calcula utilizando la Ec. (4.2.11).

Datos	H_0 ($\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$)	$\Omega_{K,0}$	$\Omega_{b,0}h^2$	$\Omega_{\text{vac},0}h^2$	M	ϵ	m	$\tilde{\beta}_0$	ζ_0 ($\times 10^8$) (Pas)
$\Lambda\nu$ CDM2-IST									
PPS	$73.8^{+1.2}_{-1.1}$	—	0.022 ± 0.011	$0.120^{+0.012}_{-0.011}$	$-19.244^{+0.033}_{-0.034}$	$0.100^{+0.095}_{-0.075}$	$0.71^{+0.90}_{-1.31}$	$6.4^{+2.2}_{-4.1}$	$8.2^{+2.8}_{-5.2}$
PPS + DESI	73.6 ± 1.1	—	0.032 ± 0.004	$0.123^{+0.010}_{-0.012}$	$-19.253^{+0.033}_{-0.032}$	$0.008^{+0.009}_{-0.005}$	$0.3^{+1.1}_{-1.4}$	$5.3^{+3.1}_{-3.3}$	$6.8^{+4.0}_{-4.2}$
Base 2 + CC	$68.92^{+0.45}_{-0.43}$	—	$0.023^{+0.015}_{-0.014}$	$0.120^{+0.014}_{-0.013}$	-19.393 ± 0.014	$0.003^{+0.054}_{-0.060}$	$0.47^{+0.84}_{-1.78}$	$5.0^{+3.0}_{-3.7}$	$6.0^{+3.6}_{-4.4}$
Base 2 + CC + R22	$69.41^{+0.41}_{-0.40}$	—	$0.023^{+0.016}_{-0.015}$	$0.120^{+0.015}_{-0.014}$	$-19.379^{+0.014}_{-0.013}$	$0.003^{+0.063}_{-0.000}$	$0.49^{+0.83}_{-1.80}$	$5.1^{+2.8}_{-3.8}$	$6.1^{+3.4}_{-4.7}$
Base 3 + CC	$68.96^{+0.42}_{-0.43}$	—	0.023 ± 0.005	0.120 ± 0.013	-19.393 ± 0.014	$0.003^{+0.027}_{-0.000}$	$0.41^{+1.00}_{-1.59}$	$5.8^{+2.6}_{-3.9}$	$6.9^{+3.1}_{-4.7}$
Base 3 + CC + R22	$69.42^{+0.40}_{-0.39}$	—	$0.023^{+0.004}_{-0.003}$	$0.119^{+0.013}_{-0.012}$	-19.379 ± 0.013	$0.003^{+0.025}_{-0.000}$	$0.39^{+1.00}_{-1.60}$	$5.6^{+2.8}_{-3.7}$	$6.7^{+3.4}_{-4.5}$
$\Lambda\nu$ CDM2-IST + Ω_K									
PPS	$73.7^{+1.2}_{-1.1}$	$0.10^{+0.20}_{-0.13}$	0.023 ± 0.011	0.120 ± 0.011	$-19.246^{+0.033}_{-0.034}$	$0.20^{+0.41}_{-0.18}$	$0.85^{+0.83}_{-1.16}$	$6.7^{+2.2}_{-4.1}$	$8.6^{+2.8}_{-5.2}$
PPS + DESI	$73.7^{+1.2}_{-1.1}$	$0.023^{+0.033}_{-0.032}$	0.032 ± 0.004	0.122 ± 0.012	$-19.252^{+0.034}_{-0.033}$	$0.018^{+0.042}_{-0.015}$	$0.5^{+1.0}_{-1.4}$	$5.6^{+2.9}_{-3.5}$	$7.2^{+3.7}_{-4.5}$
Base 2 + CC	$69.71^{+0.52}_{-0.51}$	$0.097^{+0.042}_{-0.040}$	0.023 ± 0.011	0.120 ± 0.011	$-19.374^{+0.016}_{-0.015}$	$0.012^{+0.034}_{-0.009}$	$0.3^{+1.1}_{-1.5}$	$5.8^{+2.6}_{-3.9}$	$7.0^{+3.1}_{-4.7}$
Base 2 + CC + R22	$70.26^{+0.47}_{-0.48}$	$0.116^{+0.040}_{-0.038}$	$0.023^{+0.012}_{-0.011}$	0.120 ± 0.011	$-19.358^{+0.014}_{-0.015}$	$0.017^{+0.031}_{-0.014}$	$0.3^{+1.1}_{-1.5}$	$5.8^{+2.6}_{-3.9}$	$7.1^{+3.1}_{-4.8}$
Base 3 + CC	$69.22^{+0.46}_{-0.45}$	$0.038^{+0.031}_{-0.030}$	$0.022^{+0.004}_{-0.003}$	$0.120^{+0.012}_{-0.013}$	-19.386 ± 0.014	$0.012^{+0.046}_{-0.009}$	$0.49^{+0.97}_{-1.56}$	$4.9^{+3.3}_{-3.0}$	$5.9^{+4.0}_{-3.6}$
Base 3 + CC + R22	$69.72^{+0.41}_{-0.42}$	0.044 ± 0.028	$0.023^{+0.003}_{-0.004}$	$0.119^{+0.013}_{-0.012}$	-19.372 ± 0.013	$0.011^{+0.041}_{-0.008}$	$0.4^{+1.1}_{-1.5}$	5.1 ± 3.2	6.2 ± 3.9

Tabla 9.5.3: Resumen de las distribuciones posteriores marginalizadas de los parámetros cosmológicos para los escenarios Λ vCDM3-IST y Λ vCDM3-IST + Ω_K , correspondientes al caso $m = 1/2$, para distintos conjuntos de datos. Se presenta el MAP y el intervalo de credibilidad al 68 % para cada parámetro. El parámetro de viscosidad ζ_0 se calcula utilizando la Ec. (4.2.11).

Datos	H_0 ($\text{km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$)	$\Omega_{K,0}$	$\Omega_{b,0}h^2$	$\Omega_{\text{vc},0}h^2$	M	ϵ	$\tilde{\beta}_0$	ζ_0 ($\times 10^8$) (Pas)
Λ vCDM3-IST								
PPS	73.8 ± 1.1	–	$0.023^{+0.011}_{-0.012}$	0.120 ± 0.011	-19.245 ± 0.033	$0.113^{+0.091}_{-0.080}$	$5.8^{+2.6}_{-3.9}$	$7.4^{+3.3}_{-5.0}$
PPS + DESI	73.6 ± 1.1	–	0.032 ± 0.004	$0.123^{+0.011}_{-0.012}$	$-19.252^{+0.032}_{-0.033}$	$0.008^{+0.010}_{-0.005}$	$5.4^{+2.9}_{-3.6}$	$6.9^{+3.7}_{-4.6}$
Base 2 + CC	$68.93^{+0.43}_{-0.44}$	–	$0.022^{+0.014}_{-0.013}$	$0.120^{+0.013}_{-0.014}$	-19.394 ± 0.014	$0.003^{+0.053}_{-0.000}$	$4.9^{+3.3}_{-3.2}$	$5.9^{+3.9}_{-3.8}$
Base 2 + CC + R22	$69.42^{+0.40}_{-0.41}$	–	0.023 ± 0.014	$0.119^{+0.014}_{-0.013}$	$-19.378^{+0.013}_{-0.014}$	$0.003^{+0.050}_{-0.000}$	5.0 ± 3.3	6.0 ± 4.0
Base 3 + CC	$68.96^{+0.42}_{-0.43}$	–	0.023 ± 0.004	$0.118^{+0.014}_{-0.012}$	-19.393 ± 0.014	$0.003^{+0.027}_{-0.000}$	$4.9^{+3.3}_{-3.2}$	$5.9^{+4.0}_{-3.8}$
Base 3 + CC + R22	$69.43^{+0.39}_{-0.40}$	–	0.024 ± 0.004	$0.119^{+0.013}_{-0.012}$	-19.378 ± 0.013	$0.003^{+0.023}_{-0.000}$	$4.6^{+3.6}_{-3.0}$	$5.5^{+4.3}_{-3.6}$
Λ vCDM3-IST + Ω_K								
PPS	$73.7^{+1.2}_{-1.1}$	$0.15^{+0.16}_{-0.17}$	0.023 ± 0.011	0.120 ± 0.011	-19.245 ± 0.033	$0.23^{+0.43}_{-0.19}$	$6.0^{+2.5}_{-3.7}$	$7.7^{+3.2}_{-4.7}$
PPS + DESI	73.7 ± 1.2	$0.023^{+0.036}_{-0.032}$	$0.032^{+0.004}_{-0.005}$	$0.122^{+0.013}_{-0.011}$	-19.252 ± 0.034	$0.018^{+0.049}_{-0.015}$	$5.3^{+3.0}_{-3.5}$	$6.8^{+3.8}_{-4.5}$
Base 2 + CC	$69.71^{+0.52}_{-0.51}$	$0.099^{+0.042}_{-0.041}$	0.023 ± 0.011	0.120 ± 0.011	-19.375 ± 0.016	$0.018^{+0.031}_{-0.015}$	$5.8^{+2.5}_{-4.1}$	$7.0^{+3.0}_{-4.0}$
Base 2 + CC + R22	70.26 ± 0.47	$0.115^{+0.042}_{-0.037}$	$0.023^{+0.011}_{-0.012}$	$0.120^{+0.011}_{-0.012}$	-19.359 ± 0.014	$0.018^{+0.031}_{-0.014}$	$5.2^{+3.0}_{-3.6}$	$6.3^{+3.7}_{-4.4}$
Base 3 + CC	$69.23^{+0.45}_{-0.46}$	$0.038^{+0.034}_{-0.031}$	$0.022^{+0.004}_{-0.003}$	$0.120^{+0.012}_{-0.013}$	-19.386 ± 0.014	$0.012^{+0.049}_{-0.009}$	$4.7^{+3.4}_{-3.0}$	$5.6^{+4.1}_{-3.6}$
Base 3 + CC + R22	69.71 ± 0.42	$0.044^{+0.031}_{-0.029}$	0.023 ± 0.004	$0.120^{+0.012}_{-0.013}$	-19.372 ± 0.013	$0.011^{+0.046}_{-0.009}$	$4.8^{+3.4}_{-3.1}$	$5.8^{+4.1}_{-3.7}$

Tabla 9.5.4: Resumen de las distribuciones posteriores marginalizadas de los parámetros cosmológicos para los escenarios Λ vCDM2-ISC y Λ vCDM2-ISC + Ω_K , correspondientes al caso m libre, para distintos conjuntos de datos. Se presenta el MAP y el intervalo de credibilidad al 68 % para cada parámetro. El parámetro de viscosidad ζ_0 se calcula utilizando la Ec. (4.2.11).

Datos	H_0 ($\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$)	$\Omega_{K,0}$	$\Omega_b h^2$	$\Omega_{\text{vc}} h^2$	M	ϵ	m	$\tilde{\beta}_0$	ζ_0 ($\times 10^8$) (Pas)
Λ vCDM2-ISC									
PPS	73.5 ± 1.1	—	0.028 ± 0.010	0.125 ± 0.010	$-19.250^{+0.032}_{-0.033}$	$0.027^{+0.052}_{-0.026}$	$0.65^{+0.94}_{-1.35}$	$6.6^{+2.1}_{-4.3}$	$8.4^{+2.7}_{-5.5}$
PPS + DESI	$73.4^{+1.3}_{-1.2}$	—	0.028 ± 0.014	$0.137^{+0.028}_{-0.030}$	$-19.260^{+0.036}_{-0.037}$	$0.008^{+0.063}_{-0.005}$	$0.51^{+0.96}_{-1.53}$	$5.1^{+3.2}_{-3.0}$	$6.5^{+4.1}_{-3.8}$
Base 2 + CC	69.87 ± 0.49	—	0.031 ± 0.010	0.129 ± 0.010	$-19.367^{+0.015}_{-0.016}$	$0.018^{+0.036}_{-0.015}$	$-0.33^{+1.61}_{-0.98}$	$5.4^{+3.0}_{-3.4}$	$6.6^{+3.6}_{-4.1}$
Base 2 + CC + R22	$70.34^{+0.46}_{-0.45}$	—	$0.034^{+0.010}_{-0.009}$	$0.131^{+0.009}_{-0.010}$	-19.353 ± 0.014	$0.017^{+0.036}_{-0.014}$	$0.37^{+0.98}_{-1.60}$	$5.9^{+2.5}_{-4.0}$	$7.1^{+3.0}_{-4.9}$
Base 3 + CC	69.32 ± 0.50	—	$0.020^{+0.019}_{-0.017}$	$0.130^{+0.037}_{-0.038}$	$-19.384^{+0.017}_{-0.016}$	$0.013^{+0.105}_{-0.010}$	$0.49^{+0.98}_{-1.48}$	$5.0^{+3.2}_{-3.0}$	$6.0^{+3.8}_{-3.6}$
Base 3 + CC + R22	$69.75^{+0.44}_{-0.43}$	—	$0.020^{+0.020}_{-0.018}$	$0.132^{+0.044}_{-0.043}$	$-19.370^{+0.015}_{-0.014}$	$0.013^{+0.147}_{-0.010}$	$0.3^{+1.1}_{-1.4}$	$5.1^{+3.3}_{-2.8}$	$6.2^{+4.0}_{-3.4}$
Λ vCDM2-ISC + Ω_K									
PPS	73.6 ± 1.2	$0.053^{+0.087}_{-0.069}$	0.023 ± 0.011	0.121 ± 0.011	-19.251 ± 0.034	$0.103^{+0.224}_{-0.100}$	$0.95^{+0.77}_{-1.22}$	$6.5^{+2.2}_{-4.0}$	$8.3^{+2.8}_{-5.1}$
PPS + DESI	73.6 ± 1.3	$0.022^{+0.037}_{-0.035}$	0.030 ± 0.008	$0.128^{+0.020}_{-0.022}$	$-19.256^{+0.038}_{-0.037}$	$0.013^{+0.067}_{-0.010}$	$0.57^{+0.97}_{-1.47}$	$5.2^{+3.2}_{-3.1}$	$6.6^{+4.1}_{-4.0}$
Base 2 + CC	$69.94^{+0.53}_{-0.54}$	0.016 ± 0.043	$0.029^{+0.012}_{-0.011}$	$0.126^{+0.012}_{-0.011}$	$-19.367^{+0.017}_{-0.016}$	$0.022^{+0.047}_{-0.019}$	$0.2^{+1.2}_{-1.4}$	$5.6^{+2.8}_{-3.6}$	$6.8^{+3.4}_{-4.4}$
Base 2 + CC + R22	70.48 ± 0.49	$0.029^{+0.043}_{-0.040}$	0.029 ± 0.011	$0.126^{+0.012}_{-0.011}$	-19.351 ± 0.015	$0.027^{+0.046}_{-0.024}$	$0.45^{+1.00}_{-1.53}$	$6.2^{+2.4}_{-4.0}$	$7.6^{+2.9}_{-4.9}$
Base 3 + CC	$69.34^{+0.52}_{-0.47}$	$0.011^{+0.039}_{-0.037}$	$0.021^{+0.009}_{-0.008}$	$0.125^{+0.021}_{-0.020}$	$-19.382^{+0.015}_{-0.016}$	$0.017^{+0.055}_{-0.014}$	$0.49^{+0.99}_{-1.45}$	$5.1^{+3.2}_{-3.1}$	$6.1^{+3.8}_{-3.7}$
Base 3 + CC + R22	69.87 ± 0.44	$0.018^{+0.038}_{-0.039}$	0.022 ± 0.009	0.126 ± 0.022	$-19.367^{+0.014}_{-0.015}$	$0.018^{+0.061}_{-0.015}$	$0.53^{+0.98}_{-1.41}$	$5.1^{+3.2}_{-3.0}$	$6.2^{+3.9}_{-3.6}$

Tabla 9.5.5: Resumen de las distribuciones posteriores marginalizadas de los parámetros cosmológicos para los escenarios Λ vCDM3-ISC y Λ vCDM3-ISC + Ω_K , correspondientes al caso $m = 1/2$, para distintos conjuntos de datos. Se presenta el MAP y el intervalo de credibilidad al 68 % para cada parámetro. El parámetro de viscosidad ζ_0 se calcula utilizando la Ec. (4.2.11).

Datos	H_0 ($\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$)	$\Omega_{K,0}$	$\Omega_{b,0}h^2$	$\Omega_{\text{vc},0}h^2$	M	ϵ	$\tilde{\beta}_0$	ζ_0 ($\times 10^8$) (Pas)
Λ vCDM3-ISC								
PPS	73.5 ± 1.1	–	0.028 ± 0.010	0.125 ± 0.010	-19.251 ± 0.032	$0.031^{+0.054}_{-0.030}$	5.1 ± 3.2	6.5 ± 4.1
PPS + DESI	73.4 ± 1.3	–	0.028 ± 0.015	$0.138^{+0.030}_{-0.033}$	$-19.262^{+0.038}_{-0.037}$	$0.008^{+0.076}_{-0.005}$	$5.0^{+3.2}_{-3.1}$	$6.4^{+4.1}_{-3.9}$
Base 2 + CC	$69.87^{+0.49}_{-0.50}$	–	0.032 ± 0.009	$0.129^{+0.011}_{-0.010}$	$-19.367^{+0.015}_{-0.016}$	$0.015^{+0.031}_{-0.013}$	$4.3^{+3.9}_{-2.7}$	$5.1^{+4.7}_{-3.3}$
Base 2 + CC + R22	$70.36^{+0.45}_{-0.47}$	–	0.034 ± 0.009	0.131 ± 0.010	$-19.352^{+0.014}_{-0.015}$	$0.018^{+0.033}_{-0.015}$	$5.6^{+2.6}_{-3.9}$	$6.8^{+3.2}_{-4.8}$
Base 3 + CC	$69.43^{+0.60}_{-0.54}$	–	$0.020^{+0.047}_{-0.017}$	$0.131^{+0.085}_{-0.096}$	$-19.380^{+0.020}_{-0.017}$	$0.018^{+0.216}_{-0.014}$	5.0 ± 2.6	6.0 ± 3.1
Base 3 + CC + R22	$69.81^{+0.44}_{-0.46}$	–	$0.020^{+0.040}_{-0.017}$	$0.133^{+0.082}_{-0.086}$	-19.368 ± 0.015	$0.018^{+0.180}_{-0.015}$	5.0 ± 2.7	6.1 ± 3.3
Λ vCDM3-ISC + Ω_K								
PPS	$73.8^{+1.2}_{-1.1}$	$0.060^{+0.085}_{-0.072}$	0.023 ± 0.011	0.121 ± 0.011	$-19.248^{+0.034}_{-0.032}$	$0.11^{+0.23}_{-0.11}$	$5.6^{+2.9}_{-3.5}$	$7.2^{+3.7}_{-4.5}$
PPS + DESI	$73.6^{+1.2}_{-1.3}$	$0.024^{+0.033}_{-0.034}$	0.031 ± 0.008	$0.128^{+0.019}_{-0.021}$	$-19.255^{+0.036}_{-0.037}$	$0.014^{+0.059}_{-0.012}$	$4.9^{+3.2}_{-3.1}$	$6.3^{+4.1}_{-4.0}$
Base 2 + CC	69.95 ± 0.53	0.017 ± 0.042	0.029 ± 0.011	0.127 ± 0.011	-19.366 ± 0.016	$0.023^{+0.039}_{-0.020}$	$5.1^{+3.2}_{-3.3}$	$6.2^{+3.9}_{-4.0}$
Base 2 + CC + R22	$70.49^{+0.50}_{-0.49}$	$0.032^{+0.041}_{-0.043}$	0.029 ± 0.011	0.126 ± 0.011	$-19.350^{+0.014}_{-0.015}$	$0.028^{+0.046}_{-0.025}$	$4.4^{+3.8}_{-2.7}$	$5.4^{+4.6}_{-3.3}$
Base 3 + CC	$69.36^{+0.53}_{-0.48}$	$0.011^{+0.042}_{-0.041}$	0.021 ± 0.010	$0.125^{+0.024}_{-0.023}$	$-19.382^{+0.016}_{-0.014}$	$0.016^{+0.059}_{-0.013}$	$5.0^{+3.2}_{-3.1}$	$6.0^{+3.8}_{-3.7}$
Base 3 + CC + R22	$69.88^{+0.43}_{-0.44}$	$0.018^{+0.039}_{-0.038}$	0.022 ± 0.009	$0.127^{+0.022}_{-0.024}$	$-19.366^{+0.014}_{-0.015}$	$0.020^{+0.055}_{-0.017}$	$4.9^{+3.2}_{-3.1}$	$5.9^{+3.9}_{-3.8}$

Tabla 9.5.6: Comparación entre los modelos cosmológicos viscosos espacialmente planos en el formalismo de IST y el modelo estándar Λ CDM.

Datasets	$\chi^2_{\min,i}$	$\Delta\chi^2_{\min}$	AIC _i	Δ AIC	BIC _i	Δ BIC	DIC _i	Δ DIC	$\ln \mathcal{E}_i$	$\ln \mathcal{B}_{0i}$
ΛvCDM1-IST										
PPS	1453.59	-1.56	1465.59	-5.56	1498.06	-16.38	1459.11	-0.30	-2.89	-1.60
PPS + DESI	1465.94	-0.24	1477.94	-2.24	1510.47	-7.67	1472.13	1.64	-4.14	0.88
Base 2 + CC	1510.29	3.69	1522.29	-0.31	1554.99	-11.21	1520.94	-1.11	-4.46	-0.54
Base 2 + CC + R22	1516.73	2.03	1528.73	-1.97	1561.43	-12.87	1531.87	-7.41	-3.97	-1.17
Base 3 + CC	1528.57	-0.47	1540.57	-2.47	1573.32	-7.93	1539.19	-3.13	-5.69	1.83
Base 3 + CC + R22	1539.38	-2.21	1551.38	-4.21	1584.18	-9.72	1552.62	-7.55	-5.28	1.37
ΛvCDM2-IST										
PPS	1453.60	-1.57	1467.60	-7.57	1505.49	-23.81	1459.64	-0.83	-1.78	-2.71
PPS + DESI	1465.92	-0.22	1479.92	-4.22	1517.86	-15.06	1473.29	0.48	-4.24	0.98
Base 2 + CC	1509.36	4.62	1523.36	-1.38	1561.51	-17.73	1520.90	-1.07	-3.36	-1.64
Base 2 + CC + R22	1517.74	1.02	1531.74	-4.98	1569.89	-21.33	1528.22	-3.76	-2.98	-2.16
Base 3 + CC	1527.20	0.90	1541.20	-3.10	1579.41	-14.02	1538.32	-2.26	-4.13	0.27
Base 3 + CC + R22	1540.36	-3.19	1554.36	-7.19	1592.57	-18.11	1552.01	-6.94	-4.67	0.76
ΛvCDM3-IST										
PPS	1453.56	-1.53	1465.56	-5.53	1498.04	-16.36	1459.55	-0.74	-2.83	-1.66
PPS + DESI	1465.92	-0.22	1477.92	-2.22	1510.44	-7.64	1473.32	0.45	-5.54	2.28
Base 2 + CC	1509.85	4.13	1521.85	0.13	1554.55	-10.77	1522.37	-2.54	-3.87	-1.13
Base 2 + CC + R22	1516.80	1.96	1528.80	-2.04	1561.50	-12.94	1533.99	-9.53	-4.32	-0.82
Base 3 + CC	1527.19	0.91	1539.19	-1.09	1571.93	-6.54	1538.49	-2.43	-5.69	1.83
Base 3 + CC + R22	1539.67	-2.50	1551.67	-4.50	1584.42	-9.96	1551.98	-6.91	-4.71	0.80

Nota. Se utilizan criterios de información (DIC, BIC y AIC), la evidencia bayesiana ($\ln \mathcal{E}$) y el factor de Bayes ($\ln \mathcal{B}_{0i}$). Todas las cantidades Δ se calculan respecto al modelo estándar Λ CDM para la misma combinación de datos. En particular, $\Delta\chi^2_{\min} = \chi_{\min,\Lambda\text{CDM}} - \chi_{\min,i}$, $\Delta\text{IC} = \text{IC}_{\Lambda\text{CDM}} - \text{IC}_i$ y $\ln \mathcal{B}_{0i} = \ln \mathcal{E}_{\Lambda\text{CDM}} - \ln \mathcal{E}_i$. Valores de $\Delta\text{IC} > 2$ indican preferencia por el modelo viscoso, mientras que $\ln \mathcal{B}_{0i} > 1$ favorece al modelo Λ CDM.

Tabla 9.5.7: Comparación entre los modelos cosmológicos viscosos con curvatura espacial en el formalismo de IST y el modelo estándar Λ CDM.

Datasets	$\chi^2_{\min,i}$	$\Delta\chi^2_{\min}$	AIC _i	Δ AIC	BIC _i	Δ BIC	DIC _i	Δ DIC	$\ln \mathcal{E}_i$	$\ln \mathcal{B}_{0i}$
Λ vCDM1-IST + Ω_K										
PPS	1453.29	-1.26	1467.26	-7.23	1505.18	-23.50	1459.58	-0.77	-5.02	0.53
PPS + DESI	1466.00	-0.30	1480.00	-4.30	1517.95	-15.15	1476.83	-3.06	-8.86	5.60
Base 2 + CC	1511.30	2.68	1525.30	-3.32	1563.45	-19.67	1521.83	-2.00	-7.41	2.41
Base 2 + CC + R22	1519.95	-1.19	1533.95	-7.19	1572.10	-23.54	1530.40	-5.94	-7.55	2.41
Base 3 + CC	1528.66	-0.56	1542.66	-4.56	1580.86	-15.47	1538.77	-2.71	-7.90	4.04
Base 3 + CC + R22	1540.45	-3.28	1554.45	-7.28	1592.65	-18.19	1551.07	-6.00	-9.92	6.01
Λ vCDM2-IST + Ω_K										
PPS	1453.30	-1.27	1469.30	-9.27	1512.60	-30.92	1459.52	-0.71	-3.93	-0.56
PPS + DESI	1466.05	-0.35	1482.05	-6.35	1525.41	-22.61	1476.40	-2.63	-7.51	4.25
Base 2 + CC	1510.04	3.94	1526.04	-4.06	1569.63	-25.85	1521.67	-1.84	-6.00	1.00
Base 2 + CC + R22	1520.10	-1.34	1536.10	-9.34	1579.70	-31.14	1530.30	-5.84	-5.82	0.68
Base 3 + CC	1527.86	0.24	1543.86	-5.76	1587.52	-22.13	1539.37	-3.31	-8.37	4.51
Base 3 + CC + R22	1540.43	-3.26	1556.43	-9.26	1600.10	-25.64	1550.81	-5.74	-9.02	5.11
Λ vCDM3-IST + Ω_K										
PPS	1453.26	-1.23	1467.26	-7.23	1505.15	-23.47	1459.46	-0.65	-5.02	0.53
PPS + DESI	1466.03	-0.33	1480.03	-4.33	1517.98	-15.18	1476.95	-3.18	-9.12	5.86
Base 2 + CC	1512.34	1.64	1526.34	-4.36	1564.49	-20.71	1521.83	-2.00	-6.98	1.98
Base 2 + CC + R22	1519.82	-1.06	1533.82	-7.06	1571.98	-23.42	1530.48	-6.02	-7.32	2.18
Base 3 + CC	1528.72	-0.62	1542.72	-4.62	1580.92	-15.53	1539.23	-3.17	-9.70	5.84
Base 3 + CC + R22	1540.24	-3.07	1554.24	-7.07	1592.45	-17.99	1551.20	-6.13	-9.98	6.07

Nota. Todas las cantidades Δ se calculan respecto al modelo estándar Λ CDM para la misma combinación de datos. En particular, $\Delta\chi^2_{\min} = \chi^2_{\min,\Lambda\text{CDM}} - \chi^2_{\min,i}$, $\Delta\text{IC} = \text{IC}_{\Lambda\text{CDM}} - \text{IC}_i$ y $\ln \mathcal{B}_{0i} = \ln \mathcal{E}_{\Lambda\text{CDM}} - \ln \mathcal{E}_i$. Valores de $\Delta\text{IC} > 2$ indican preferencia por el modelo viscoso, mientras que $\ln \mathcal{B}_{0i} > 1$ favorece al modelo Λ CDM.

Tabla 9.5.8: Comparación entre los modelos cosmológicos viscosos en el formalismo de ISC y el modelo estándar Λ CDM.

Datasets	$\chi_{\min,i}$	$\Delta\chi_{\min}$	AIC_i	ΔAIC	BIC_i	ΔBIC	DIC_i	ΔDIC	$\ln \mathcal{E}_i$	$\ln \mathcal{B}_{0i}$
ΛvCDM2-ISC										
PPS	1453.61	-1.58	1467.61	-7.58	1505.50	-23.82	1459.68	-0.87	-8.45	3.96
PPS + DESI	1465.83	-0.13	1479.83	-4.13	1517.77	-14.97	1448.23	25.54	-1.75	-1.51
Base 2 + CC	1508.49	5.49	1522.49	-0.51	1560.64	-16.86	1517.39	2.44	-1.64	-3.36
Base 2 + CC + R22	1515.74	3.02	1529.74	-2.98	1567.89	-19.33	1523.64	0.82	-2.71	-2.43
Base 3 + CC	1526.87	1.23	1540.87	-2.77	1579.07	-13.68	-	-	-0.75	-3.11
Base 3 + CC + R22	1537.87	-0.70	1551.87	-4.70	1590.08	-15.62	-	-	-0.24	-3.67
ΛvCDM3-ISC										
PPS	1453.60	-1.57	1465.60	-5.57	1498.08	-16.40	1459.70	-0.89	-3.59	-0.90
PPS + DESI	1465.85	-0.15	1477.85	-2.15	1510.37	-7.57	-	-	-2.64	-0.62
Base 2 + CC	1508.98	5.00	1520.98	1.00	1553.68	-9.90	1522.38	-2.55	-3.51	-1.49
Base 2 + CC + R22	1516.18	2.58	1528.18	-1.42	1560.89	-12.33	1536.56	-12.10	-3.66	-1.48
ΛvCDM2-ISC + Ω_K										
PPS	1453.60	-1.57	1469.60	-9.57	1512.90	-31.22	1461.73	-2.92	3.00	-7.49
PPS + DESI	1465.58	0.12	1481.58	-5.88	1524.94	-22.14	1478.17	-4.40	-4.08	0.82
Base 2 + CC	1506.01	7.97	1522.01	-0.03	1565.61	-21.83	1517.64	2.19	-5.33	0.33
Base 2 + CC + R22	1513.68	5.08	1529.68	-2.92	1573.29	-24.73	1525.79	-1.33	-5.30	0.16
Base 3 + CC	1526.09	2.01	1542.09	-3.99	1585.75	-20.36	1524.36	11.70	-5.35	1.49
Base 3 + CC + R22	1537.36	-0.19	1553.36	-6.19	1597.02	-22.56	1534.47	10.60	-4.06	0.15
ΛvCDM3-ISC + Ω_K										
PPS	1453.64	-1.61	1467.64	-7.61	1505.53	-23.85	1461.48	-2.67	-5.14	0.65
PPS + DESI	1465.69	0.01	1479.69	-3.99	1517.63	-14.83	1480.08	-6.31	-2.13	-1.13
Base 2 + CC	1505.89	8.09	1519.89	2.09	1558.04	-14.26	1517.08	2.75	-6.98	1.98
Base 2 + CC + R22	1513.78	4.98	1527.78	-1.02	1565.93	-17.37	1525.48	-1.02	-6.25	1.11
Base 3 + CC	1526.23	1.87	1540.23	-2.13	1578.44	-13.05	1514.96	21.10	-6.30	2.44
Base 3 + CC + R22	1537.00	0.17	1551.00	-3.83	1589.21	-14.74	1539.04	6.03	-4.34	0.43

Nota. Todas las cantidades Δ se calculan respecto al modelo estándar Λ CDM para la misma combinación de datos. En concreto, $\Delta\chi_{\min}^2 = \chi_{\min,\Lambda\text{CDM}} - \chi_{\min,i}$, $\Delta AIC = AIC_{\Lambda\text{CDM}} - AIC_i$ y $\ln \mathcal{B}_{0i} = \ln \mathcal{E}_{\Lambda\text{CDM}} - \ln \mathcal{E}_i$. Valores de $\Delta AIC > 2$ indican preferencia por el modelo viscoso, mientras que $\ln \mathcal{B}_{0i} > 1$ favorece al modelo Λ CDM.

Capítulo 10

Conclusiones generales

En esta tesis se llevó a cabo un estudio detallado de modelos cosmológicos con Λ CDM en el contexto de la expansión tardía del Universo, considerando tanto el formalismo no causal de Eckart como las formulaciones causales de Israel-Stewart, en sus versiones truncada y completa. El análisis se realizó mediante inferencia bayesiana utilizando muestreos MCMC y distintos conjuntos de datos cosmológicos de bajo corrimiento al rojo, incluyendo SNe Ia (PP/PPS), mediciones del parámetro de Hubble $H(z)$ provenientes de CC, compilaciones independientes de BAO que incorporan mediciones de DESI, y valor local R22.

Desde el punto de vista observacional, los distintos escenarios viscosos presentan una capacidad comparable para reproducir la dinámica de expansión observada. En todos los formalismos considerados, las reconstrucciones del parámetro de Hubble $H(z)$ y del módulo de distancia se mantienen dentro de las incertidumbres observacionales en el rango $z \leq 2.4$, lo que indica que las extensiones viscosas constituyen descripciones dinámicas viables del fondo cosmológico. Sin embargo, las diferencias entre los modelos se manifiestan principalmente en la interpretación física de los parámetros disipativos y en la comparación estadística con el modelo estándar.

En relación con la constante de Hubble actual H_0 , los modelos viscosos muestran un comportamiento sólido frente a las distintas configuraciones consideradas. Los ajustes basados exclusivamente en supernovas tienden a favorecer valores altos, $H_0 \simeq 73 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, en concordancia con las determinaciones locales. Al incorporar BAO, CC y R22, las estimaciones convergen hacia valores menores en el rango $H_0 \sim 69\text{--}71 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, reduciendo la discrepancia entre mediciones locales y cosmológicas a un nivel cercano a 1σ . Este comportamiento se reproduce tanto en los modelos basados en Eckart como en los modelos causales de Israel-Stewart, indicando que la inclusión de viscosidad de volumen puede contribuir a aliviar parcialmente la tensión de Hubble, aunque sin resolverla de manera concluyente.

El parámetro de curvatura espacial muestra una fuerte dependencia del conjunto de datos empleado. En varios escenarios que no incluyen mediciones de DESI aparecen tensiones respecto a la planitud, con valores de $\Omega_{K,0}$ distintos de cero a niveles cercanos a $2-3\sigma$. No obstante, la inclusión de las mediciones más recientes de BAO provenientes de DESI desplaza sistemáticamente las restricciones hacia $\Omega_{K,0} = 0$, reforzando la consistencia con un universo espacialmente plano. Este comportamiento es particularmente claro en los modelos de Israel–Stewart, donde las restricciones resultan más estables frente a los cambios en las combinaciones de datos.

Los parámetros asociados a la viscosidad de volumen permanecen débilmente constreñidos por los datos cosmológicos tardíos. En el formalismo de Eckart, la viscosidad actual presenta valores característicos del orden de $\zeta_0 \sim 10^6$ Pa s, mientras que en los formalismos causales de Israel–Stewart se obtienen valores significativamente mayores, $\zeta_0 \sim 10^8$ Pa s. Esta diferencia de aproximadamente dos órdenes de magnitud refleja una propiedad fundamental de cada formulación termodinámica: mientras que la teoría de Eckart supone una respuesta instantánea del fluido frente a la expansión, las teorías causales incorporan un tiempo de relajación finito que permite sostener viscosidades más altas sin violar el principio de causalidad ni comprometer la estabilidad dinámica.

El índice de viscosidad m , que controla la dependencia del coeficiente viscoso con la densidad de materia oscura viscosa, permanece en general pobremente determinado por los datos. En los modelos basados en la teoría de Eckart los ajustes observacionales tienden a favorecer valores negativos de m , lo que sugiere una viscosidad que aumenta a medida que la densidad disminuye, es decir, efectos disipativos más relevantes en épocas tardías del universo. En contraste, en los formalismos de Israel–Stewart las restricciones observacionales favorecen sistemáticamente $m > 0$. Esta aparente discrepancia se explica por la distinta forma en que el parámetro m interviene en las ecuaciones dinámicas: mientras que en Eckart aparece como $(\Omega_{\text{vc}}/\Omega_{\text{vc},0})^m$, en los modelos causales entra efectivamente como $(\Omega_{\text{vc}}/\Omega_{\text{vc},0})^{-m}$ en la ecuación de propagación. En consecuencia, valores $m < 0$ en Eckart y $m > 0$ en Israel–Stewart pueden describir una misma dependencia efectiva del término viscoso con la evolución de la densidad.

En los modelos causales aparece además el parámetro de compresibilidad ϵ , asociado al tiempo de relajación del fluido viscoso. Los resultados indican que este parámetro tiende a valores pequeños, especialmente cuando se incluyen las mediciones de DESI, lo que implica tiempos de relajación relativamente largos y sugiere que los efectos disipativos evolucionan lentamente en escalas cosmológicas. En consecuencia, la influencia dinámica de la viscosidad sobre la expansión tardía del universo resulta limitada dentro del rango de precisión actual de los datos observacionales.

La comparación estadística entre los distintos modelos revela que, aunque los escenarios viscosos pueden ajustarse adecuadamente a los datos, el modelo estándar Λ CDM continúa siendo favo-

recido cuando se aplican criterios de información que penalizan la complejidad paramétrica. En particular, el criterio BIC favorece sistemáticamente a Λ CDM en todas las combinaciones de datos consideradas, mientras que los criterios AIC y DIC muestran en algunos casos una preferencia moderada por ciertos modelos viscosos, especialmente en análisis que no incluyen las mediciones más recientes de DESI. De manera consistente, los factores de Bayes indican evidencia positiva o fuerte a favor de Λ CDM en los escenarios más restrictivos, particularmente en modelos con curvatura espacial.

Por lo tanto, los resultados obtenidos muestran que las cosmologías con materia oscura viscosa constituyen extensiones físicamente motivadas del modelo estándar capaces de reproducir la dinámica observada del universo tardío. No obstante, dentro de la precisión actual de los datos cosmológicos de fondo, no se encuentra evidencia estadísticamente significativa que requiera la presencia de viscosidad de volumen ni que favorezca de manera concluyente los formalismos disipativos frente al modelo Λ CDM. A pesar de ello, estos modelos continúan siendo de gran interés desde el punto de vista teórico, ya que proporcionan un escenario efectivo para explorar posibles desviaciones respecto al comportamiento ideal de los fluidos cosmológicos y permiten investigar el papel de procesos disipativos en la evolución del universo. Estudios futuros que incorporen información adicional proveniente del CMB y de la evolución de las perturbaciones cosmológicas podrían ofrecer restricciones más estrictas sobre los efectos viscosos y permitir una discriminación más sólida entre los distintos formalismos hidrodinámicos considerados.

Capítulo 11

Trabajo futuro

El análisis desarrollado en esta tesis permitió estudiar distintos modelos cosmológicos con materia oscura fría viscosa, considerando tanto el formalismo no causal de Eckart como el formalismo causal de Israel-Stewart, además de escenarios con energía oscura dinámica y curvatura espacial. Parte de estos resultados, correspondientes al estudio de modelos Λ vCDM dentro del formalismo de Eckart, fueron publicados en [Villalobos et al. \(2026\)](#). En general, los resultados obtenidos muestran que los modelos viscosos son compatibles con las observaciones actuales a nivel de fondo cosmológico. Sin embargo, el modelo estándar Λ CDM continúa siendo estadísticamente favorecido de acuerdo con los criterios de selección empleados.

No obstante, el análisis a nivel de fondo homogéneo e isótropo no es suficiente para caracterizar adecuadamente la naturaleza disipativa de la materia oscura. Estudios previos han mostrado que, aunque viscosidades de volumen relativamente grandes pueden ser compatibles con la historia de expansión cosmológica ([Normann & Brevik, 2017](#); [Cruz et al., 2022a](#); [Villalobos et al., 2026](#)), la inclusión de perturbaciones cosmológicas modifica significativamente este escenario. En particular, la viscosidad introduce términos disipativos dependientes de escala que pueden suprimir la formación de estructuras a pequeñas escalas ([Velten & Schwarz, 2012](#); [Velten et al., 2014](#)). Como consecuencia, el estudio de la formación y evolución de estructuras proporciona una herramienta mucho más sensible para explorar la viabilidad física y observacional de los modelos cosmológicos viscosos.

En este contexto, una continuación natural de este trabajo consiste en extender el análisis cosmológico al régimen de perturbaciones lineales y no lineales, incorporando observables de alta precisión del CMB y de la estructura a gran escala. Esta extensión resulta fundamental, ya que las anisotropías del CMB y la evolución de las perturbaciones de densidad son sensibles a los efectos disipativos asociados a la viscosidad de volumen, lo que permite estudiar su impacto sobre la dinámica de la materia oscura y la formación de estructuras. Además, la combinación de

observaciones del universo temprano y tardío permite estudiar de manera consistente las posibles desviaciones respecto al modelo estándar y evaluar el impacto de la viscosidad sobre las tensiones cosmológicas actuales, particularmente la tensión de Hubble.

En el régimen lineal y subhorizonte ($k \gg aH$, siendo k el número de onda), la evolución de las perturbaciones de la materia oscura viscosa está gobernada por un sistema acoplado para el contraste de densidad $\delta \equiv \delta\rho_{\text{vc}}/\rho_{\text{vc}}$, la divergencia de velocidad y la perturbación de la presión viscosa $\delta\Pi$. En particular, la evolución del contraste de densidad puede escribirse como

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - 4\pi G\rho_{\text{vc}}\delta = -\frac{k^2}{a^2\rho_{\text{vc}}}\delta\Pi,$$

donde $\delta\Pi = 0$ en el modelo estándar ΛCDM . A escalas pequeñas y en épocas tardías ($z \lesssim 1$), las perturbaciones de densidad dejan de ser lineales y entran en el régimen no lineal. En este régimen, los diferentes modos de Fourier se acoplan entre sí y la evolución de las estructuras debe ser estudiada mediante simulaciones numéricas N-body o métodos aproximados, como la teoría de perturbaciones no lineales. En consecuencia, el estudio del régimen no lineal permite obtener límites observacionales más estrictos sobre el parámetro de viscosidad ζ_0 (Velten & Schwarz, 2012; Velten et al., 2014).

Este análisis requerirá la implementación de las ecuaciones completas de perturbaciones cosmológicas en el código CLASS (Cosmic Linear Anisotropy Solving System, Blas et al., 2011), con el fin de estudiar de manera consistente el impacto de la viscosidad sobre los observables cosmológicos asociados al CMB y a la formación de estructuras.

Agradecimientos

Desde pequeña soñé con ser astrónoma y, con tan solo once años, supe que para alcanzar ese sueño tendría que hacer un doctorado. Sin embargo, durante muchos años postergué ese anhelo mientras dedicaba mi tiempo y mi corazón a mis hijos. Aun así, nunca desapareció; permaneció conmigo hasta que encontré el momento adecuado para retomarlo. Afortunadamente, distintas personas marcaron mi vida y me ayudaron a no renunciar a ese sueño, personas a quienes admiro y respeto profundamente. Entre ellas, la profesora Amelia Ramírez, quien me enseñó la importancia de la perseverancia, y el profesor Rodolfo Barbá, quien, con la pasión y el entusiasmo que transmitía por esta maravillosa ciencia, guió mis primeros pasos en astronomía y dejó una huella imborrable. Más allá de lo académico, ambos me entregaron algo mucho más valioso: confianza, apoyo y consejos oportunos que atesoro con cariño.

Retomar este sueño tampoco habría sido posible sin mi familia. A mi compañero de vida, Leonardo, gracias por tu amor, generosidad y paciencia durante todos estos años. A Carlos López, mi chamito y mi hermano pequeño, gracias por estar siempre presente. Ambos fueron fundamentales para que me atreviera a dar este paso y comenzar este doctorado. A mis hijos: Renata, Gabriel, Leonora y Noemí. Ustedes son mi mayor inspiración y la razón más profunda detrás de cada esfuerzo. Este logro también les pertenece.

Durante mi formación académica, tuve el privilegio de encontrar a grandes maestros. Por eso, deseo expresar mi más profundo agradecimiento a mis profesores guía, Yerko Vázquez y Norman Cruz. Su dedicación, paciencia y compromiso fueron esenciales no solo para el desarrollo de esta tesis, sino también para mi formación como investigadora. Ser su estudiante ha sido un verdadero honor. Asimismo, agradezco a Yolanda Celis, Julia Arias, Facundo Gómez, Héctor Cuevas y Pedro Vega, cuyo apoyo fue fundamental para llegar hasta aquí.

Agradezco a los miembros del tribunal por el tiempo dedicado a la revisión de esta tesis y por sus valiosos comentarios y observaciones, que contribuyeron significativamente a mejorar este trabajo.

Finalmente, gracias a todas las personas que me acompañaron a lo largo de este camino. Hoy puedo mirar atrás y sentir que aquel sueño que comenzó en mi infancia finalmente se hizo realidad.

Esta tesis fue realizada gracias al financiamiento de la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) mediante la Beca Nacional de Doctorado N° 21212268. Además, recibió apoyo mediante la Beca de Arancel y Manutención de la Dirección de Postgrados y Postítulos, junto con el aporte del Programa de Doctorado en Astronomía de la Universidad de La Serena. Parte de esta investigación recibió financiamiento de ANID a través de los proyectos FONDECYT N° 1220871 (IP Yerko Vázquez) y N° 1250969 (IP Norman Cruz). Finalmente, agradezco al proyecto FIULS 2030 18ENI2-104235 – CORFO por proporcionar recursos computacionales.

Bibliografía

- Abdul Karim M., et al., 2025, [PhRvD](#), **112**, 083515
- Akaike H., 1974, IEEE Transactions on Automatic Control, **19**, 716
- Alam S., et al., 2017, [MNRAS](#), **470**, 2617
- Anand S., Chaubal P., Mazumdar A., Mohanty S., 2017, , [2017](#), 005
- Anand S., Chaubal P., Mazumdar A., Mohanty S., Parashari P., 2018, , [2018](#), 031
- Anderson L., et al., 2014a, [MNRAS](#), **439**, 83
- Anderson L., et al., 2014b, [MNRAS](#), **441**, 24
- Ashoorioon A., Davari Z., 2023, [ApJ](#), **959**, 120
- Avelino A., Nucamendi U., 2010, , [2010](#), 009
- Bamba K., Capozziello S., Nojiri S., Odintsov S. D., 2012, [Ap&SS](#), **342**, 155
- Bautista J. E., et al., 2017, [A&A](#), **603**, A12
- Bennett C. L., et al., 2013, [ApJS](#), **208**, 20
- Blake C., et al., 2012, [MNRAS](#), **425**, 405
- Blas D., Lesgourgues J., Tram T., 2011, , [2011](#), 034
- Borghi N., Moresco M., Cimatti A., 2022, [ApJL](#), **928**, L4
- Bravo Medina S., Nowakowski M., Batic D., 2019, [Classical and Quantum Gravity](#), **36**, 215002
- Brout D., et al., 2022, [ApJ](#), **938**, 110
- Burnham K. P., Anderson D. R., 2002, Model Selection and Multimodel Inference: A Practical Information-Theoretic Approach, Second Edition. Springer-Verlag, New York

- Caldwell R. R., 2002, [Physics Letters B](#), **545**, 23
- Caldwell R. R., Dave R., Steinhardt P. J., 1998, [PhRvL](#), **80**, 1582
- Carroll S. M., 2001, [Living Reviews in Relativity](#), **4**, 1
- Carroll S. M., 2019, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, [doi:10.1017/9781108770385](#)
- Carroll S. M., Press W. H., Turner E. L., 1992, [ARA&A](#), **30**, 499
- Carroll S. M., Hoffman M., Trodden M., 2003, [PhRvD](#), **68**, 023509
- Chevallier M., Polarski D., 2001, [International Journal of Modern Physics D](#), **10**, 213
- Chiba T., 2002, [PhRvD](#), **66**, 063514
- Chuang C.-H., Wang Y., 2013, [MNRAS](#), **435**, 255
- Copeland E. J., Sami M., Tsujikawa S., 2006, [International Journal of Modern Physics D](#), **15**, 1753
- Cruz M., Cruz N., Lepe S., 2017, [PhRvD](#), **96**, 124020
- Cruz N., González E., Lepe S., Sáez-Chillón Gómez D., 2018, , **2018**, 017
- Cruz N., Hernández-Almada A., Cornejo-Pérez O., 2019, [PhRvD](#), **100**, 083524
- Cruz N., González E., Palma G., 2020, [General Relativity and Gravitation](#), **52**, 62
- Cruz N., González E., Jovel J., 2022a, [Symmetry](#), **14**, 1866
- Cruz N., González E., Jovel J., 2022b, [PhRvD](#), **105**, 024047
- Cruz N., Gómez G., González E., Palma G., Rincón Á., 2023, [Physics of the Dark Universe](#), **42**, 101351
- Davis M., Efstathiou G., Frenk C. S., White S. D. M., 1985, [ApJ](#), **292**, 371
- Delubac T., et al., 2015, [A&A](#), **574**, A59
- Di Valentino E., Ferreira R. Z., Visinelli L., Danielsson U., 2019, [Physics of the Dark Universe](#), **26**, 100385
- Di Valentino E., et al., 2021, [Classical and Quantum Gravity](#), **38**, 153001

- Dyson F. W., Eddington A. S., Davidson C., 1920, [Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A](#), 220, 291
- Eckart C., 1940, [Physical Review](#), 58, 919
- Einstein A., 1915a, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, pp 831–839
- Einstein A., 1915b, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, pp 844–847
- Einstein A., 1916, [Annalen der Physik](#), 354, 769
- Eisenstein D. J., Hu W., 1998, [ApJ](#), 496, 605
- Font-Ribera A., et al., 2014, , [2014](#), 027
- Forconi M., Di Valentino E., 2025, [Physics of the Dark Universe](#), 48, 101904
- Foreman-Mackey D., et al., 2013, emcee: The MCMC Hammer, Astrophysics Source Code Library, record ascl:1303.002
- Friedmann A., 1922, [Zeitschrift fur Physik](#), 10, 377
- Frieman J. A., Turner M. S., Huterer D., 2008, [ARA&A](#), 46, 385
- Fritis A., Villalobos-Silva D., Vásquez Y., López-Caraballo C. H., Helo J. C., 2024, [Physics of the Dark Universe](#), 46, 101650
- Gaztañaga E., Cabré A., Hui L., 2009, [MNRAS](#), 399, 1663
- Goodman J., Weare J., 2010, [Communications in Applied Mathematics and Computational Science](#), 5, 65
- Hastings W. K., 1970, [Biometrika](#), 57, 97
- Hawking S. W., Ellis G. F. R., 1973, The Large Scale Structure of Space-Time. Cambridge University Press
- Heavens A., Fantaye Y., Mootoovaloo A., Eggers H., Hosenie Z., Kroon S., Sellentin E., 2017a, [arXiv e-prints](#), p. [arXiv:1704.03472](#)
- Heavens A., Fantaye Y., Sellentin E., Eggers H., Hosenie Z., Kroon S., Mootoovaloo A., 2017b, [PhRvL](#), 119, 101301

- Herrera-Zamorano L., Hernández-Almada A., García-Aspeitia M. A., 2020, [European Physical Journal C](#), **80**, 637
- Hinton S. R., 2016, [The Journal of Open Source Software](#), **1**, 00045
- Hubble E., 1929, [Proceedings of the National Academy of Science](#), **15**, 168
- Hurvich C. M., Tsai C.-L., 1989, [Biometrika](#), **76**, 297
- Israel W., 1976, [Annals of Physics](#), **100**, 310
- Israel W., Stewart J., 1979, [Annals of Physics](#), **118**, 341
- Jeffreys H., 1961, *The Theory of Probability*, third edn. Oxford University Press
- Jiao K., Borghi N., Moresco M., Zhang T.-J., 2023, [ApJS](#), **265**, 48
- Jimenez R., Loeb A., 2002, [ApJ](#), **573**, 37
- Jimenez R., Verde L., Treu T., Stern D., 2003, [ApJ](#), **593**, 622
- Kass R. E., Raftery A. E., 1995, [Journal of the American Statistical Association](#), **90**, 773
- Komatsu E., et al., 2009, [ApJS](#), **180**, 330
- Komatsu E., et al., 2011, [ApJS](#), **192**, 18
- Landau L. D., Lifshits E. M., 1959, *Fluid mechanics*, by L.D. Landau and E.M. Lifshitz. Translated from the Russian by J.B. Sykes and W.H. Reid.. Their Course of theoretical physics, v. 6, Pergamon Press, London
- Lemaître G., 1927, *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, **47**, 49
- Liebermann L. N., 1949, [Phys. Rev.](#), **76**, 440
- Linder E. V., 2003, [PhRvL](#), **90**, 091301
- Liu Z.-W., Röpke F. K., Han Z., 2023, [Research in Astronomy and Astrophysics](#), **23**, 082001
- Maartens R., 1995, [Classical and Quantum Gravity](#), **12**, 1455
- Maartens R., 1996, [arXiv e-prints](#), pp astro-ph/9609119
- Maartens R., Méndez V., 1997, [PhRvD](#), **55**, 1937
- Mangano G., Miele G., Pastor S., Peloso M., 2002, [Physics Letters B](#), **534**, 8

- Mangano G., Miele G., Pastor S., Pinto T., Pisanti O., Serpico P. D., 2005, [Nuclear Physics B](#), **729**, 221
- Metropolis N., Rosenbluth A. W., Rosenbluth M. N., Teller A. H., Teller E., 1953, [JChPh](#), **21**, 1087
- Minkowski R., 1941, [PASP](#), **53**, 224
- Misner C. W., 1968, [ApJ](#), **151**, 431
- Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A., 1973, *Gravitation*
- Mohr P. J., Newell D. B., Taylor B. N., Tiesinga E., 2025, [Reviews of Modern Physics](#), **97**, 025002
- Moresco M., 2015, [MNRAS](#), **450**, L16
- Moresco M., et al., 2012, , [2012](#), 006
- Moresco M., et al., 2016, , [2016](#), 014
- Moresco M., et al., 2022, [Living Reviews in Relativity](#), **25**, 6
- Mörtsell E., Goobar A., Johansson J., Dhawan S., 2022, [ApJ](#), **933**, 212
- Mukhanov V., 2005, *Physical Foundations of Cosmology*, [doi:10.2277/0521563984](#).
- Müller I., 1967, [Zeitschrift fur Physik](#), **198**, 329
- Murphy G. L., 1973, [PhRvD](#), **8**, 4231
- Nightingale J. D., 1973, [ApJ](#), **185**, 105
- Normann B. D., Brevik I., 2017, [Modern Physics Letters A](#), **32**, 1750026
- Oka A., Saito S., Nishimichi T., Taruya A., Yamamoto K., 2014, [MNRAS](#), **439**, 2515
- Padilla L. E., Tellez L. O., Escamilla L. A., Vazquez J. A., 2021, [Universe](#), **7**, 213
- Padmanabhan T., 2003, [PhR](#), **380**, 235
- Padmanabhan T., Chitre S. M., 1987, [Physics Letters A](#), **120**, 433
- Parrent J., Friesen B., Parthasarathy M., 2014, [Ap&SS](#), **351**, 1
- Peebles P. J., Ratra B., 2003, [Reviews of Modern Physics](#), **75**, 559

- Perivolaropoulos L., 2024, [PhRvD](#), **110**, 123518
- Perlmutter S., et al., 1999, [ApJ](#), **517**, 565
- Piattella O. F., Fabris J. C., Zimdahl W., 2011, , [2011](#), 029
- Planck Collaboration et al., 2020, [A&A](#), **641**, A6
- Ratsimbazafy A. L., Loubser S. I., Crawford S. M., Cress C. M., Bassett B. A., Nichol R. C., Väisänen P., 2017, [MNRAS](#), **467**, 3239
- Riess A. G., et al., 1998, [AJ](#), **116**, 1009
- Riess A. G., et al., 2022, [ApJL](#), **934**, L7
- Robertson H. P., 1935, [ApJ](#), **82**, 284
- Rubin V. C., Ford Jr. W. K., 1970, [ApJ](#), **159**, 379
- Rubin V. C., Ford Jr. W. K., Thonnard N., 1980, [ApJ](#), **238**, 471
- Ryden B., 2003, Introduction to cosmology
- Sanchez N. G., 2021, [PhRvD](#), **104**, 123517
- Schwarz G., 1978, Annals of Statistics, **6**, 461
- Schwarzschild K., 1916a, , pp 189–196
- Schwarzschild K., 1916b, , pp 424–434
- Scolnic D., et al., 2022, [ApJ](#), **938**, 113
- Simon J., Verde L., Jimenez R., 2005, [PhRvD](#), **71**, 123001
- Spergel D. N., et al., 2003, [ApJS](#), **148**, 175
- Spergel D. N., et al., 2007, [ApJS](#), **170**, 377
- Spiegelhalter D. J., Best N. G., Carlin B. P., Van Der Linde A., 2002, Journal of the Royal Statistical Society Series B, **64**, 583
- Stern D., Jimenez R., Verde L., Kamionkowski M., Stanford S. A., 2010, , [2010](#), 008
- Trotta R., 2008, [Contemporary Physics](#), **49**, 71

- Tsujikawa S., 2013, [Classical and Quantum Gravity](#), **30**, 214003
- Velten H., Schwarz D. J., 2012, [PhRvD](#), **86**, 083501
- Velten H., Caramês T. R. P., Fabris J. C., Casarini L., Batista R. C., 2014, [PhRvD](#), **90**, 123526
- Verde L., Schöneberg N., Gil-Marín H., 2024, [ARA&A](#), **62**, 287
- Villalobos R. N., Vásquez Y., Cruz N., López-Caraballo C. H., 2026, [A&A](#), **708**, A344
- Walker A. G., 1937, [Proceedings of the London Mathematical Society](#), **42**, 90
- Wang Y., et al., 2017, [MNRAS](#), **469**, 3762
- Wang D., et al., 2018, [MNRAS](#), **477**, 1528
- Weinberg S., 1971, [ApJ](#), **168**, 175
- Weinberg S., 1972, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*
- Weinberg S., 1989, [Reviews of Modern Physics](#), **61**, 1
- Weinberg D. H., Mortonson M. J., Eisenstein D. J., Hirata C., Riess A. G., Rozo E., 2013, [PhR](#), **530**, 87
- Whelan J., Iben Jr. I., 1973, [ApJ](#), **186**, 1007
- Yang W., Pan S., Di Valentino E., Paliathanasis A., Lu J., 2019, [PhRvD](#), **100**, 103518
- Zel'dovich Y. B., 1968, [Soviet Physics Uspekhi](#), **11**, 381
- Zhang C., Zhang H., Yuan S., Liu S., Zhang T.-J., Sun Y.-C., 2014, [Research in Astronomy and Astrophysics](#), **14**, 1221
- Zlatev I., Wang L., Steinhardt P. J., 1999, [PhRvL](#), **82**, 896
- Zuntz J., et al., 2015, [Astronomy and Computing](#), **12**, 45
- Zwicky F., 1933, *Helvetica Physica Acta*, **6**, 110